Diplomarbeit

Maßzerlegung, Integralräume und dynamische Systeme

Christopher R. Nerz

Wintersemester 2010/11

Betreut von

Prof. Dr. Rainer Nagel

im Fachbereich Mathematik
der Eberhard Karls Universität Tübingen

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst zu haben und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben. Des Weiteren versichere ich, dass die vorliegende Arbeit bisher weder in gleicher noch ähnlicher Form einer Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Tübingen, den 21. Februar 2011

Ort, Datum

Christopher R. Nerz

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich den vielen Menschen danken, ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Als Erstes danke ich meiner Freundin Johanna Scheck, meinen Eltern und meinen Geschwistern für ihre Unterstützung vor, während und zu Ende meines Studiums, die mir die nötige Kraft gab, mein Studium und diese Arbeit abzuschließen.

Herzlich bedanke ich mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Rainer Nagel für die Motivation und Zeit, die er in die vielen Diskussionen und Korrekturen investiert hat sowie für das besondere Verständnis der Mathematik, das ich von ihm lernen durfte.

Ebenso danke ich Dr. Markus Haase für seine Korrekturen und anregenden Ideen zur Ergodischen Zerlegung. Auch beim Rest des Arbeitsbereichs Funktionalanalysis, besonders bei Prof. Dr. Ulf Schlotterbeck, Dr. Ulrich Groh und David Kunszenti-Kovacs bedanke ich mich für die hilfreichen Gespräche.

Dank gebührt auch den Dozenten der Universität Tübingen bei denen ich Vorlesungen und Seminare besuchen durfte oder die mir die Möglichkeit gaben erste Lehr-Erfahrungen in Tutorien zu sammeln. Speziell danke ich dafür den Professoren Mohameden Ould Ahmedou, Anton Deitmar, Frank Loose, Rainer Nagel, Franz Pedit, Andreas Prohl und Reiner Schätzle.

Ich bedanke mich auch bei allen Studenten, die mit mir Übungen bearbeitet, Seminare gehalten, Vorlesungen vorbereitet oder einfach Zeit verbracht haben. Vor allem ohne Dhia Mansour, Markus Klein, Felix Pogorzelski, Stephanie Schäfer, Alexander Seizinger und Pirmin Vollert wäre das Studium trocken und öde gewesen. Auch will ich diese Gelegenheit nutzen, um Markus Klein zu danken, dass er sein umfassendes LaTeX-Wissen mit mir teilte.

Für die fast endlosen Diskussionen, vielen Ideen und zahllosen Korrekturen bedanke ich mich bei Stephanie Schäfer, ganz speziell auch dafür, dass sie mich zu meinem Arbeitsthema führte.

Ein wichtiger Dank geht auch an all die anderen Freunde und Bekannte, die mir mit Hilfe, Zeit und aufmunternden Worten zur Seite standen oder mir zuhörten, wenn ich von meinem Studium berichtete. Vor allem in Gesellschaft von Albrecht, Alex, Felix, Jo, Juli, Kaspar, Katharina, Mark, Markus, Martina, Max, Patrick, Philipp, Pirmin und Steffi konnte ich mich erholen und gesunde Ablenkung finden.

Danke.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wie für viele andere mathematische Bereiche findet sich der Ursprung der *Ergodentheorie* in der Physik, genauer in der mechanischen Thermodynamik. Dort wurde der Begriff der *Ergode* durch J. Boltzmann in [Bol84] eingeführt. Später wurde die *Ergodenhypothese* eingeführt. Sie fordert von einem physikalisches System mit einer Transformation, beispielsweise die möglichen Zustände thermisch agierender Atome eines Gases und ihre Veränderung in der Zeit, dass jeder beliebige Anfangszustand jeden anderen Zustand erreichen kann. Obwohl, wie in [Bru71] nachgelesen werden kann, 1913 von A. Rosenthal gezeigt wurde, dass kein mechanisches System diese Hypothese erfüllen kann, entwickelte sich im Laufe des 20. Jahrhunderts eine eigenständige mathematische Theorie solcher Systeme, die auch in vielen anderen Bereichen der Mathematik Anwendung findet.

Die klassische Ergodentheorie beschäftigt sich mit einer messbaren, maßerhaltenden Transformation $\varphi : \Omega \to \Omega$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, μ). Wir dagegen wählen eine andere Betrachtungsweise, indem wir den zugehörigen L^1-Raum $\mathrm{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ und den durch φ auf diesem Raum induzierten Verbandsoperator T betrachten. Man nennt üblicherweise (Ω, φ) bzw. $(\Omega, \Sigma, \mu, \varphi)$ *ergodisch*, wenn die einzigen φ-invarianten Mengen essentiell gleich der leeren oder der ganzen Menge sind. Das heißt, ein System heißt ergodisch, wenn es nicht in „kleinere Teile“ $(\Omega_i, \Sigma|_{\Omega_i}, \mu|_{\Omega_i}, \varphi|_{\Omega_i})$ mit $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$ zerlegt werden kann. Dieser Begriff überträgt sich natürlich in die lineare Theorie, indem wir $(\mathrm{L}^1(\Omega, \mu), T)$ *ergodisch* nennen, falls der Fixraum von T ein-dimensional ist. Schon durch diese Definition stellt sich die Frage, ob bzw. wie man ein nicht ergodisches System in ergodische Teile zerlegen kann, das heißt, wann ein System nicht in kleinere Teile zerlegt werden kann. Die aus der Literatur (beispielsweise [Aar97, Satz 2.2.9ff]) bekannte Antwort darauf ist, dass jedes solche System in ergodische „Teilsysteme“ zerlegt werden kann. Wir zeigen das äquivalente Resultat in Abschnitt 3.3 in der „Sprache“ der Operatorentheorie, unter der Voraussetzung, dass T *bi-Markovsch* ist und verwenden dies in Abschnitt 3.4, um einen alternativen Beweis für die maßtheoretische Interpretation zu geben. Um zu verstehen, welche Problematik bei dieser Zerlegung auftreten kann, betrachten wird das folgende Beispiel:

Seien $\Omega = [0; 1] \times \mathcal{S}^1$ der Zylinder, $\varphi : \Omega \to \Omega$ die Drehung des Zylinders um einen irrationalen Winkel und μ das (auf eins normierte) Oberflächenmaß. Wir erkennen, dass φ das Maß invariant lässt. Gleichzeitig erkennen wir, dass alle „Teilzylinder“, beispielsweise $[0.1; 0.2] \times \mathcal{S}^1$, unter dieser Drehung invariant bleiben – siehe Abbildung 1, Seite 2. Die kleinsten invarianten Teilmengen sind dabei die „Zylinder mit infinitesimaler Breite“, das heißt Kreise, beispielsweise $\{0.5\} \times \mathcal{S}^1$. Es scheint daher klar zu sein, wie man dieses System in kleinere ergodische Systeme auftrennt, indem wir den Zylinder einfach als die Menge der Teil-Kreise verstehen. Es stellt sich nun die Frage, wie wir

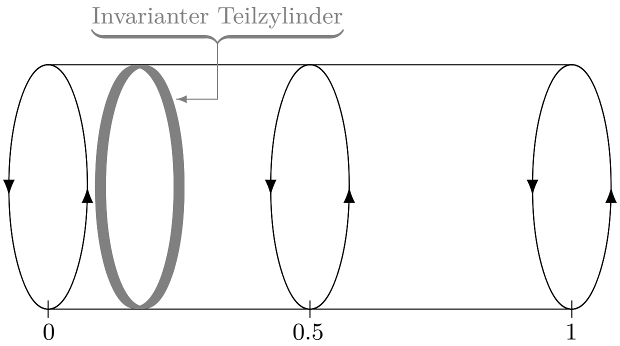

Abbildung 1: Zylinder mit Drehung und invarianten Teilzylinder

das Gesamtmaß in Maße auf diesen ergodischen Teilen zerlegen, das heißt, wie wir für $t \in [0;1]$ ein Maß μ_t auf der Sphäre $\mathcal{S}^1$ finden so, dass

$$\mu(A) = \int_{[0;1]} \mu_t(A)\, \mathrm{d}\nu(t) \qquad \forall\, A \in \Sigma.$$

Ein „Einschränken“ von μ kommt nicht in Frage, da all diese Kreise μ-Nullmengen sind. In diesem speziellen Fall liegt die Lösung aber dennoch auf der Hand: Wir betrachten einfach für jeden Teilkreis $\{t\} \times \mathcal{S}^1$ das auf eins normierte Oberflächenmaß dieser Sphäre als μ_t und erhalten sofort die Aussage. Etwas schwieriger ist die Lösung im Fall eines beliebigen Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, Σ, μ) und eines „Faktors“, das heißt eines Wahrscheinlichkeitsraums $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu})$ mit einer Surjektion $\pi : \Omega \to \Omega'$, die die Maße „erhält“. Diese „Maßzerlegung“ wird uns in Kapitel 1 beschäftigen. Wir werden dabei nicht die klassische Maßzerlegung, wie sie beispielsweise in [DM75] gefunden werden kann, durchführen, sondern stattdessen eine „Zerlegung der Norm“ von $\mathrm{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ durchführen. Dies ist gleichwertig, da das Maß $\mu(A)$ einer messbaren Teilmenge von Ω auch als Norm $\|\chi_A\|_{\mathrm{L}^1(\Omega,\Sigma,\mu)}$ der zugehörigen charakteristischen Funktion aufgefasst werden kann.

Wie bereits erwähnt, wollen wir nicht direkt die Maße bzw. Grundräume sondern die Funktionenräume auf diesen betrachten. Daher ist es von Interesse, nicht nur die Norm dieser Räume, sondern auch ihre Elemente zu „zerlegen“. Offensichtlich ergibt eine stetige Funktion $f : [0;1] \times \mathcal{S}^1 \to \mathbb{R}$ auf dem Zylinder eine Funktion auf jedem der Teilkreise $\{t\} \times \mathcal{S}^1$, in dem wir sie auf diesen einschränken, also $f|_{\{t\}\times\mathcal{S}^1}$ betrachten. Umgekehrt ist dies jedoch nicht möglich, das heißt durch die Vorgabe einer stetigen Funktion f_t auf jedem dieser Kreise und „Zusammensetzen“ ergibt nicht notwendigerweise eine stetige Funktion auf dem Zylinder, da die Regularität in „horizontaler Richtung“ fehlt. Betrachten wir L^1-Funktionen statt der stetigen, so erhalten wir weitere Probleme, da ihre Einschränkung auf eine Nullmenge, wie den Kreis, nicht wohldefiniert ist. Als Lösung für diese Probleme erkennen wir in unserem Beispiel, dass wir jede Funktion $f \in \mathrm{L}^1(\Omega)$ als ein Element des Bochnerraums $\mathrm{L}^1([0;1]; \mathrm{L}^1(\mathcal{S}^1))$ interpretieren können und ebenso jedes Element dieses Bochnerraums auf natürliche Weise eine L^1-Funktion auf Ω definiert.

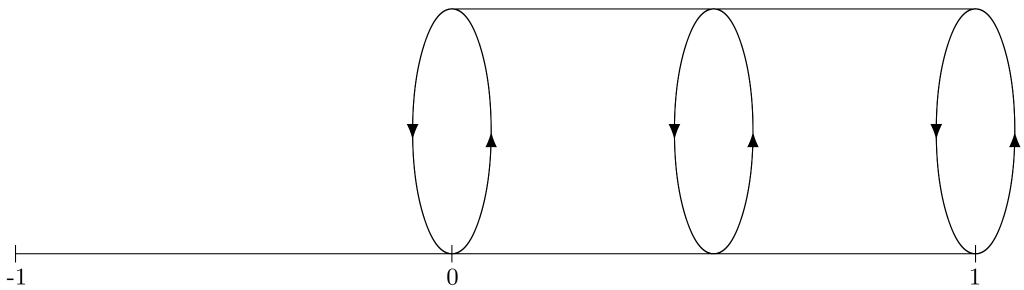

Abbildung 2: Zylinder mit „Griff“

Im allgemeinen Fall ist dies so nicht möglich. Als Beispiel dafür betrachten wir wieder den Zylinder und erweitern diesen jedoch um einen „Griff“ $\Omega = ([-1;0)\times\{0\})\cup([0;1]\times\mathcal{S}^1)$ – siehe Abbildung 2. Das Oberflächenmaß erweitern wir um das Lebesguemaß auf diesem „Griff“ und die Drehung des Griffs interpretieren wir als die Identität desselben. Zerlegen wir diesen neuen Raum „entlang der Horizontalen“, so ergeben sich als „Teil-Maße“ μ_t für $t \geq 0$, wie oben, die Oberflächenmaße der Kreise und für $t < 0$ die Dirac-Maße. Damit erhalten wir zu den „Breiten“ t unterschiedliche Räume, nämlich $\mathrm{L}^1(\mathcal{S}^1)$ für $t \geq 0$ und $\mathbb{R}$ für $t < 0$. Um diese Problematik im Allgemeinen zu lösen, entwickeln wir in Kapitel 2 die (nach dem Kenntnisstand des Autors neue) Struktur des *Integralraums* und führen einen Vergleich dieser Struktur mit den aus der Literatur bekannten Strukturen des Bochnerraums (beispielsweise aus [AE08, Kap. 10]) und des direkten Integrals aus [Neu49, Kap. 3] bzw. [Tak79, Kap. 4, Abschnitt 8].

Kapitel 1

Grundlagen, Darstellungsräume und Maßzerlegung

Wir werden in diesem Kapitel einige Definitionen wiederholen, grundlegende Schreibweisen einführen und die ersten Strukturansätze der weiteren Arbeit entwickeln. Wir setzen dabei Ergebnisse aus der Theorie der Banachverbände und positiver Operatoren voraus. Eine Einführung dazu ist in [Sch75] zu finden.

Als erstes Resultat konstruieren wir im Abschnitt 1.2 für vorgegebene AL-Räume separable, metrische Grundräume so, dass wir die AL-Räume mit L^1-Räumen auf diesen Grundräumen identifizieren können. Anschließend wird im Abschnitt 1.3 die Zerlegung von Maßen in der Terminologie von AL-Räumen formuliert und bewiesen. Eine maßtheoretische bzw. stochastische Version dieses Theorems kann unter anderem in [DM75, S. 125 – 128] gefunden werden. Diese Resultate motivieren die Struktur des *Integralraums*, die in Kapitel 2 eingeführt wird. Außerdem werden wir in Kapitel 3 diese Zerlegung von Maßen als ersten Schritt einer Aufspaltung eines AL-Raums bzw. eines dynamischen Systems in „kleinere Teile“ verwenden.

1.1 Definitionen und Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die verwendeten Schreibweisen, einige der grundlegenden Begriffe, sowie bekannte Theoreme aufgezählt.

1.1.1 Definition (maßerhaltende Abbildung, bi-messbare Abbildung)
Eine messbare Abbildung $\pi : K \to \widetilde{K}$ zwischen Wahrscheinlichkeitsräumen (K, Σ, μ) und $(\widetilde{K}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu})$ heißt *maßerhaltend*, falls sie messbar ist und sie die Identität

$$\mu\left(\pi^{-1}(A)\right) = \widetilde{\mu}(A) \qquad \forall\, A \in \widetilde{\Sigma}$$

erfüllt. Sie heißt *bi-messbar*, falls sie bijektiv ist und ihre Umkehrabbildung ebenfalls messbar ist. Existiert eine μ- bzw. $\widetilde{\mu}$-Nullmenge $K_0 \subseteq K$ bzw. $\widetilde{K_0} \subseteq \widetilde{K}$ so, dass $\pi|_{K \setminus K_0} : K \setminus K_0 \to \widetilde{K} \setminus K_0$ bi-messbar ist, so heißt die Abbildung *fast überall bi-messbar*.

1.1.2 Schreibweise (Positiver Kegel, Positiv/Negativ Teil und Suprema)
In einem Banachverband X bezeichnet X^+ den positiven Kegel, das heißt

$$X^+ := \{x \in X \mid 0 \leq x\}.$$

Für zwei Elemente $x, y \in X$ schreiben wir $x \wedge y$ für das Supremum von x und y und $x^+ := 0 \wedge x$ bzw. $x^- := 0 \wedge (-x)$ bezeichnet den positiv- bzw. negativ-Teil von x.

1.1.3 Definition (AL/AM-Raum)
Ein Banachverband X heißt *AL-Raum*, falls die Norm auf dem positiven Kegel additiv ist, das heißt

$$\|x+y\|_X = \|x\|_X + \|y\|_X \qquad \forall\, 0 \leq x, y \in X.$$

Ein Banachverband X heißt *AM-Raum*, falls die Norm auf dem positiven Kegel mit der Supremumsbildung vertauscht, das heißt

$$\|x \wedge y\|_X = \|x\|_X \wedge \|y\|_X \qquad \forall\, 0 \leq x, y \in X.$$

Die klassischen Beispiele für AL-Räume sind L^1-Räume und für AM-Räume $\mathcal{C}(K)$-Räume. Im Fall von endlichen Maßen existieren auf beiden dieser Räume „Einheiten", zum Beispiel die konstanten Eins Funktionen. Diese haben die folgende Eigenschaft:

1.1.4 Definition (Schwache Ordnungseinheit)
Ein positives Element 1_X eines Banachverbands heißt *schwache Ordnungseinheit*, falls für alle positiven $y \in X$ mit $\inf(y, 1_X) = 0$, bereits $y = 0$ folgt.

1.1.5 Schreibweise (Erzeugtes Ideal)
Für ein positives Element $x \in X_+$ eines Banachverbands X ist das von x erzeugte Ideal durch

$$E_x := \{y \in X \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : -nx \leq y \leq nx\}$$

definiert. Insbesondere ist E_x mit der Norm

$$\|y\| := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid -\lambda x \leq y \leq \lambda x\}$$

ein AM-Raum mit starker Ordnungseinheit x ([Sch75, Kapitel 2, Prop. 7.2, Kor. 1]). Des Weiteren ist x eine schwache Ordnungseinheit von X, falls das erzeugte Ideal E_x dicht in X liegt.

Betrachten wir zwei Lebesgue-Räume $\mathrm{L}^1(\Omega, \mu)$ und $\mathrm{L}^1(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mu})$ über Wahrscheinlichkeitsräumen (Ω, Σ, μ) und $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu})$ als Beispiele für AL-Räume, so erkennen wir, dass jeder induzierte Operator bereits ein Verbandsoperator ist. Das heißt jeder Operatoren $U : \mathrm{L}^1(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mu}) \to \mathrm{L}^1(\Omega, \mu)$, für den eine messbare Abbildung $\pi : \Omega \to \widetilde{\Omega}$ mit

$$Uf = f \circ \pi \qquad \forall\, f \in \mathrm{L}^1(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mu})$$

existiert, ist ein Verbandsoperator. Ein solcher Verbandsoperator überführt die Eins-Funktion $\mathbb{1}_\Omega$ des einen Raums in die Eins-Funktion $\mathbb{1}_{\widetilde{\Omega}}$ des anderen Raums.

1.1.6 Definition ((Bi-)Markovscher Operator)
Ein positiver Operator $T : X \to Y$ zwischen Banachverbänden mit schwachen Ordnungseinheiten $\mathbb{1}_X$ bzw. $\mathbb{1}_Y$ heißt *Markovsch* oder *Markovoperator*, falls $T\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_Y$ gilt. Gilt außerdem $X = Y$ und für ein $\eta \in X'$ bereits $T'\eta = \eta$, so heißt T *bi-Markovsch bezüglich* η.

Als wichtiges Resultat der Theorie von AM-Räumen verwenden wir die Darstellung von AM-Räumen aus [Sch75, Kapitel 2, Thm. 7.4] oder [Kak41, Thm. 2], welcher besagt, dass Räume stetiger Funktionen nicht nur Beispiele für AM-Räume sind, sondern jeder AM-Raum durch den Raum der stetigen Funktionen auf einem geeigneten Grundraum K dargestellt werden kann. Wir erweitern diesen Satz um [Sch75, Kapitel 2, Prop. 7.5] um die Metrisierbarkeit von K zu erhalten.

1.1.7 Theorem (Kakutani)
Ist X ein AM-Raum mit Einheit 1_X, so existiert ein kompakter Raum K und ein bijektiver, isometrischer, Markovscher Verbandsoperator $\xi : \mathcal{C}(K) \to X$. Ist X separabel, so kann K separabel und metrisch gewählt werden.

Ähnlich dem obigen Resultat wird in [Sch75, Kapitel 2, Thm. 8.3, 8.4] nachgewiesen, dass L^1-Räume nicht bloße Beispiele von AL-Räumen sind, sondern jeder AL-Raum durch einen geeignete L^1-Raum dargestellt werden kann.

1.1.8 Theorem (Darstellung von AL-Räumen)
Zu jedem separablen AL-Raum X mit schwacher Ordnungseinheit 1_X existiert ein Kompaktum K und ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf K so, dass $X \cong \mathrm{L}^1(K, \mu)$ und $E_{1_X} \cong \mathcal{C}(K) \cong \mathrm{L}^\infty(K, \mu)$.

1.2 Darstellungsräume

Nach Theorem 1.1.8 wissen wir, dass wir jeden separablen AL-Raum X als L^1-Raum über einem Kompaktum auffassen können. Jedoch erhalten wir in diesem Theorem einen *Stone-Raum* K als Grundraums des L^1-Raums, insbesondere ist dieser Raum im Allgemeinen weder metrisch noch separabel. Wie in [Sch11, Abschnitt 1.1] zeigen wir in diesem Abschnitt, dass wir auch einen metrischen Grundraum wählen können.

1.2.1 Definition ((Verträgliche) Modelle)
Ist X ein separabler AL-Raum mit schwacher Ordnungseinheit, so nennen wir $\mathrm{L}^1(K,\mu)$ ein *(topologisches) Modell* von X, falls K ein kompakter Raum und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf K ist so, dass $X \cong \mathrm{L}^1(K,\mu)$. Ist K metrisch und separabel, so nennen wir $\mathrm{L}^1(K,\mu)$ ein *metrisches Modell* von X.

Sind $i : Y \to X$ und $T : X \to X$ Markovsche Verbandsoperatoren auf zwei separablen AL-Räumen X und Y, dann heißen zwei Modelle $\mathrm{L}^1(K,\mu) \cong X$ und $\mathrm{L}^1(L,\nu) \cong Y$ dieser Räume *verträglich bezüglich* i, falls $i(\mathcal{C}(L)) \subseteq \mathcal{C}(K)$ und *verträglich mit* T, falls $T(\mathcal{C}(K)) \subseteq \mathcal{C}(K)$.

Im Folgenden werden wir von jedem topologischen Modell $\mathrm{L}^1(K,\mu)$ eines AL-Raums annehmen, dass μ strikt positiv ist, das heißt für alle positiven Funktionen $f \in \mathcal{C}(K)$ impliziert die Gleichheit $\mu(f) = 0$ bereits $f = 0$.

Sind $\mathrm{L}^1(K,\mu)$ und $\mathrm{L}^1(L,\nu)$ Modelle von separablen AL-Räumen X und Y wie in Theorem 1.1.8 und $i : Y \to X$ ein Markovoperator, so überführt dieser essentiell beschränkte Funktionen in essentiell beschränkte Funktionen. Da sowohl $\mathrm{L}^\infty(K,\mu) \cong \mathcal{C}(K)$ als auch $\mathrm{L}^\infty(L,\nu) \cong \mathcal{C}(L)$ gilt, sind diese Modelle mit i verträglich. Vergleichbar zu diesem Ergebnis zeigen wir nun wie angekündigt, dass wir sogar metrische Modelle wählen können, die verträglich bezüglich eines vorgegebenen Markovoperators sind.

1.2.2 Theorem (Verträgliche Darstellungen)
Sind $j : X \to Y$ und $i : Y \to X$ Markovoperatoren zwischen zwei separablen AL-Räumen X und Y mit schwachen Ordnungseinheiten 1_X und 1_Y, so existieren metrische, separable Modelle von X und Y, die verträglich bezüglich i und j sind.

Beweis (Nach einer Idee von Markus Haase, siehe [Sch11, Satz 1.1.10])
Nach [Sch75, Kapitel 2, Prop. 8.3] liegt das Ideal E_{1_X} bzw. E_{1_Y} dicht in X bzw. Y. Mit der Separabilität dieser Räume können wir also eine abzählbare Menge $A \subseteq E_{1_X}$ bzw. $B \subseteq E_{1_Y}$ wählen, die dicht in X bzw. Y liegt und 1_X bzw. 1_Y enthält. Wir definieren $A_1 := \operatorname{lat}(A)$ bzw. $B_1 := \operatorname{lat}(B)$ als die von A bzw. B erzeugten Unterverbände von A bzw. B und induktiv für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$A_{n+1} := \operatorname{lat}(A_n \cup i(B_n)) \text{ und } B_{n+1} := \operatorname{lat}(B_n \cup j(A_n)).$$

Offensichtlich sind A_n bzw. B_n abzählbare Unterverbände von X bzw. Y, insbesondere sind

$$\mathcal{A} := \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \text{ und } \mathcal{B} := \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n},$$

wobei der Abschluss bezüglich der Normen der AM-Räume durchgeführt wird, separable AM-Unterräume von E_{1_X} bzw. E_{1_Y}. Per Konstruktion und Stetigkeit von i bzw. j

gilt

$$i(\mathcal{B}) \subseteq \overline{\bigcup_n i(B_n)} \subseteq \overline{\bigcup_n A_{n+1}} = \mathcal{A}$$

bzw.

$$j(\mathcal{A}) \subseteq \overline{\bigcup_n j(A_n)} \subseteq \overline{\bigcup_n B_{n+1}} = \mathcal{B},$$

wobei der Abschluss wieder bezüglich der Norm des jeweiligen AM-Raums durchgeführt wird. Nach Theorem 1.1.7 existieren separable, metrische Kompakta K und L sowie bijektive Markovsche Verbandsoperatoren $\xi : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{A}$ und $\zeta : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{B}$. Definieren wir nun

$$\mu(f) := \left\|\xi f^+\right\|_X - \left\|\xi f^-\right\|_X \qquad \forall f \in \mathcal{C}(K)$$

bzw.

$$\nu(g) := \left\|\zeta g^+\right\|_Y - \left\|\zeta g^-\right\|_Y \qquad \forall g \in \mathcal{C}(L),$$

so sind dies offensichtlich positive, stetige Linearformen auf $\mathcal{C}(K)$ bzw. $\mathcal{C}(L)$ und es gilt

$$\mu(|f|) = 0 \iff f = 0 \quad \text{und} \quad \nu(|g|) = 0 \iff g = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{C}(K),\ g \in \mathcal{C}(L).$$

Interpretieren wir diese Linearformen mittels des Satzes von Riesz als Maße, so ergibt die Vervollständigung von $\mathcal{C}(K)$ bezüglich der Norm $\|f\|_1 := \mu(|f|)$ den Raum $\mathrm{L}^1(K,\mu)$ und die Vervollständigung von $\mathcal{C}(L)$ bezüglich $\|g\|_1 := \nu(|g|)$ ergibt $\mathrm{L}^1(L,\nu)$. Damit erhalten wir die Aussage. ///

1.2.3 Bemerkung
Analysieren wir den Beweis von Theorem 1.2.2, so erkennen wir, dass wir die Modelle so wählen können, dass sie zusätzlich mit Markovoperatoren $T : X \to X$ bzw. $S : Y \to Y$ verträglich sind. Dies erreichen wir, in dem wir im Beweis die rekursive Definition von A_n bzw. B_n durch

$$A_{n+1} := \operatorname{lat}(A_n \cup i(B_n) \cup T(A_n)) \quad \text{bzw.} \quad B_{n+1} := \operatorname{lat}(B_n \cup j(A_n) \cup T(B_n))$$

ersetzen. Ebenso können wir eine abzählbare Menge $A_0 \subseteq E_{1_X}$ bzw. $B_0 \subseteq E_{1_Y}$ vorgeben und die metrischen Modelle so wählen, dass $A_0 \subseteq \mathcal{A} \cong \mathcal{C}(K)$ bzw. $B_0 \subseteq \mathcal{B} \cong \mathcal{C}(L)$, also $\xi^{-1}(A_0) \subseteq \mathcal{C}(K)$ bzw. $\zeta^{-1}(B_0) \subseteq \mathcal{C}(L)$. Dafür betrachten wir im Beweis statt A einfach $A \cup A_0$ bzw. statt B einfach $B \cup B_0$.

1.2.4 Korollar (Verträgliche Darstellungen – II)
Ist $i : Y \to X$ ein isometrischer, Markovscher Verbandsoperator zwischen zwei AL-Räumen X und Y mit schwachen Ordnungseinheiten, so existieren metrische Modelle $\mathrm{L}^1(K,\mu)$ und $\mathrm{L}^1(L,\nu)$ von X und Y, die verträglich bezüglich i und i' sind, wenn wir i' mittels Identifikation des Duals eines L^1-Raums mit dem zugehörigen L^∞-Raum als Markovoperator $i' : \mathrm{L}^\infty(K,\mu) \to \mathrm{L}^\infty(L,\nu)$ auffassen.

Beweis

Mit Theorem 1.1.7 wählen wir metrische Modelle $\mathrm{L}^1(K,\mu)$ und $\mathrm{L}^1(L,\nu)$ von X und Y. Da für $f \in \mathcal{C}(L)$ bereits

$$\int i'f \,\mathrm{d}\nu = \langle i'f \mid \mathbb{1}_L \rangle = \langle f \mid i\mathbb{1}_L \rangle = \langle f \mid \mathbb{1}_K \rangle = \int f \,\mathrm{d}\mu$$

gilt, wobei $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ die kanonische Dualität ist, können wir i' stetig zu einem Markovoperator $j : \mathrm{L}^1(K,\mu) \to \mathrm{L}^1(L,\nu)$ fortsetzen. Wenden wir nun Theorem 1.2.2 an, so erhalten wir Modelle $\mathrm{L}^1(\widetilde{K},\widetilde{\mu})$ und $\mathrm{L}^1(\widetilde{L},\widetilde{\nu})$ von X und Y, die verträglich bezüglich i und j sind. ///

Wie bereits erwähnt ist ein Operator zwischen Funktionenräumen, der durch eine messbare Abbildung zwischen den Grundräumen induziert ist, ein Markovsche Verbandsoperator. In [Sch75, Kapitel 2, Thm. 9.1] bzw. [Kak41, Thm. 2] wird die Frage beantwortet, wann die Umkehrung gilt, das heißt, wann ein Markovsche Verbandsoperator zwischen Funktionenräumen bereits ein induzierter Operator ist:

1.2.5 Proposition (Darstellung von Markovoperatoren)

Ist $i : Y \to X$ ein Markovscher Verbandsoperator zwischen separablen AL-Räumen und sind $\mathrm{L}^1(K,\mu)$ und $\mathrm{L}^1(L,\nu)$ bezüglich i verträgliche Modelle von X und Y, so existiert eine stetige Surjektion $\pi : K \to L$ so, dass i von π induziert ist, das heißt

$$if = f \circ \pi \qquad \forall\, f \in \mathrm{L}^1(L,\nu)\,.$$

Insbesondere gilt

$$i\,(f \cdot g) = (f \cdot g) \circ \pi = (f \circ \pi) \cdot (g \circ \pi) = if \cdot ig \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{C}(K)\,.$$

Beweis

Nach Voraussetzung können wir i als Markovschen Verbandsoperator $i : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(K)$ auffassen. Nach [Sch75, Kapitel 2, Thm. 9.1] (oder [Kak41, Thm. 2]) existiert eine stetige Abbildung $\pi : K \to L$ mit

$$if = f \circ \pi \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}(L)\,.$$

Mit der Dichtheit von $\mathcal{C}(L)$ in $\mathrm{L}^1(L,\nu)$ und der Stetigkeit von i bezüglich der $\mathrm{L}^1(L,\nu)$- bzw. $\mathrm{L}^1(K,\mu)$-Norm folgt

$$if = f \circ \pi \qquad \forall\, f \in \mathrm{L}^1(L,\nu)\,.$$

Nun kommen wir zur Surjektivität von π. Die Menge $L \setminus \operatorname{Bild}\pi$ ist offen, da ihr Komplement $\pi(K)$ als stetiges Bild des Kompaktums K kompakt ist. Wäre $L \setminus \operatorname{Bild}\pi$ nicht die leere Menge, so würde nach dem Lemma von Urysohn eine stetige Abbildung existieren, die außerhalb dieser Menge Null ist, aber nicht überall verschwindet. Da aber für jede stetige Abbildung $f \in \mathcal{C}(L)$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq L \setminus \operatorname{Bild}\pi$ bereits $i(f) = f \circ \pi = 0$ gilt, impliziert die Injektivität von i, dass jedes solche Abbildung f die Nullfunktion ist. Damit ist $L \setminus \operatorname{Bild}\pi$ die leere Menge, also ist π surjektiv. ///

1.2.6 Bemerkung
Offensichtlich können wir Proposition 1.2.5 auch auf einen Markovschen Verbandsoperator $T : X \to X$ und ein mit ihm verträgliches Modell $\mathrm{L}^1(K, \mu)$ von X anwenden.

1.2.7 Standardvoraussetzungen
Im Folgenden sind X und Y stets separable AL-Räume mit schwachen Ordnungseinheiten und $i : X \to Y$ ein isometrischer, Markovscher Verbandsoperator. Des Weiteren seien Modelle $\mathrm{L}^1(K, \mu)$ und $\mathrm{L}^1(L, \nu)$ von X und Y gewählt, die verträglich bezüglich i und $P := i'$ sind. Nach Korollar 1.2.4 können immer solche metrische Modelle gefunden werden. Dabei seien μ und ν strikt positiv, das heißt für positive, stetige Funktionen $f \in \mathcal{C}(K)$ und $g \in \mathcal{C}(L)$ impliziert $\mu(f) = 0$ bzw. $\nu(g) = 0$ bereits $f = 0$ bzw. $g = 0$.

1.2.8 Definition (Bedingte Erwartung)
Unter den Standardvoraussetzungen 1.2.7 heißt ein Markovoperator $P : \mathrm{L}^1(K, \mu) \to \mathrm{L}^1(L, \nu)$ *bedingte Erwartung bezüglich* i, falls

$$\langle Pf \mid \nu \rangle = \langle f \mid \mu \rangle \qquad \text{für } f \in \mathrm{L}^1(K, \mu), \tag{1.2.1}$$

$$P(f \cdot i(g)) = g \cdot P(f) \qquad \text{für } g \in \mathcal{C}(L) \text{ und } f \in \mathrm{L}^1(K, \mu). \tag{1.2.2}$$

1.2.9 Bemerkung
Insbesondere ist eine bedingte Erwartung P bezüglich i auf Grund von Gleichung 1.2.1 kontraktiv, da $|Pf| \leq P|f|$. Gleichung 1.2.2 impliziert $P \circ i = \mathrm{id}$. Beides werden wir im Folgenden mehrfach verwenden.

Ein Beispiel für eine bedingte Erwartung wird durch Theorem 1.3.1 gegeben.

1.3 Maßzerlegung

Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem Kompaktum K und ν das auf Eins normierte Zählmaß auf einer endlichen Menge L, sowie $\pi : K \to L$ eine messbare, maßerhaltende Surjektion, so können wir μ „entlang L“ zerlegen. In diesem Fall können wir nämlich μ als gewichtete Summe über die Einschränkungen $\mu|_{\pi^{-1}\{l\}}$ von μ auf die Urbilder der einzelnen Punkte $l \in L$ schreiben, das heißt

$$\mu = \sum_{l \in L} \frac{\mu|_{\pi^{-l}(l)}}{|L|} = \sum_{l \in L} \nu(l) \, \mu|_{\pi^{-l}(l)}.$$

Das Ziel dieses Abschnittes ist es nun, dies auf die Standardvoraussetzungen 1.2.7 zu verallgemeinern. Dafür werden wir die Punktmaße δ_l auf L unter Zuhilfenahme der Adjungierten i' von i auf K zurückziehen. Dabei ist es von entscheidender Bedeutung, i' als Abbildung von $\mathcal{C}(K)$ nach $\mathcal{C}(L)$ aufzufassen.

1.3.1 Theorem (Die Adjungierte von i ist eine bedingte Erwartung)
Unter den Standardvoraussetzungen 1.2.7 ist $P := i' : \mathrm{L}^\infty(K,\mu) \to \mathrm{L}^\infty(L,\nu)$ eine bedingte Erwartung bezüglich i, falls wir $\mathrm{L}^1(K,\mu)'$ bzw. $\mathrm{L}^1(L,\nu)'$ mit $\mathrm{L}^\infty(K,\mu)$ bzw. $\mathrm{L}^\infty(L,\nu)$ identifizieren.

Beweis
Mittels Dualisierung folgt $i' : \mathrm{L}^\infty(K,\mu) \to \mathrm{L}^\infty(L,\nu)$ und ist dies ein Verbandsoperator. Nach den Standardvoraussetzungen 1.2.7 ist $i'(\mathcal{C}(K)) \subseteq \mathcal{C}(L)$. Da für alle positiven $0 \le f \in \mathcal{C}(L) \subseteq \mathrm{L}^1(L,\nu)$ die Identität

$$\langle i'\mathbb{1}_K \,|\, f\rangle = \langle \mathbb{1}_K \,|\, if\rangle = \int \mathbb{1}_K \cdot if \,\mathrm{d}\mu = \|if\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu)} = \|f\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu)} = \langle \mathbb{1}_L \,|\, f\rangle$$

gilt, folgt $i'\mathbb{1}_K = \mathbb{1}_L$, also ist i' ein Markovoperator. Für $0 \le g \in \mathcal{C}(K) \subseteq \mathrm{L}^1(K,\mu)$ gilt

$$\|i'g\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu)} = \langle |i'g| \,|\, \mathbb{1}_L\rangle \le \langle i'\,|g| \,|\, \mathbb{1}_L\rangle = \langle |g| \,|\, i\mathbb{1}_L\rangle = \langle |g| \,|\, \mathbb{1}_K\rangle = \|g\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu)} .$$

Also ist i' zu einer kontraktiven Abbildung $i' : \mathrm{L}^1(K,\mu) \to \mathrm{L}^1(L,\nu)$ fortsetzbar. Mit

$$i'\mu = i'\mathbb{1}_K = \mathbb{1}_L = \nu$$

gilt auch Gleichung 1.2.1 für i'.

Um Gleichung 1.2.2 zu beweisen, seien zunächst $g \in \mathcal{C}(L)$ und $f \in \mathcal{C}(K)$ beliebig. Bezeichnet $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ die kanonische Dualität, so folgern wir für π aus Proposition 1.2.5 und beliebiges $h \in \mathcal{C}(L)$, dass

$$\begin{aligned}
\langle h \,|\, i'\,(f \cdot ig)\rangle &= \langle ih \,|\, f \cdot ig\rangle = \int_K ih \cdot f \cdot ig \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_K (h \circ \pi) \cdot f \cdot (g \circ \pi) \,\mathrm{d}\mu = \int_K \left((g \cdot h) \circ \pi\right) \cdot f \,\mathrm{d}\mu = \langle i\,(g \cdot h) \,|\, f\rangle \\
&= \langle g \cdot h \,|\, i'f\rangle = \int_L g \cdot h \cdot i'f \,\mathrm{d}\nu = \langle h \,|\, g \cdot i'f\rangle .
\end{aligned}$$

Dies impliziert $g \cdot i'f = i'(f \cdot ig)$. Mit der Dichtheit von $\mathcal{C}(K)$ in $\mathrm{L}^1(K,\mu)$ folgt schließlich Gleichung (1.2.2). ///

Nun können wir die Maße auf K, die wir durch Rückzug der Punktmaße von L erhalten, betrachten und erkennen durch Theorem 1.3.4, dass diese μ wie gefordert zerlegen.

1.3.2 Definition (Desintegrationsabbildung)
Unter den Standardvoraussetzungen 1.2.7 ist für $P = i'$ die *Desintegrationsabbildung von $X = L^1(K,\mu)$ bezüglich $Y = L^1(L,\nu)$* definiert durch

$$\mu_{(\cdot)} : L \to \mathcal{C}\,(K)' : l \mapsto \mu_l := \delta_l \circ P|_{\mathcal{C}(K)}.$$

1.3.3 Bemerkung
Wir erkennen sofort, dass für $l \in L$ bereits $\mu_l(\mathbb{1}_K) = (P\mathbb{1}_K)(l) = \mathbb{1}_L(l) = 1$ gilt. Das heißt, wenn wir μ_l mit dem Satz von Riesz als Radonmaß interpretieren, so ist μ_l ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

1.3.4 Theorem (Norm-Zerlegung)
Unter den Standardvoraussetzungen 1.2.7 wird die Norm von X durch

$$\|f\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu)} = \int_L \mu_l\left(|f|\right) \mathrm{d}\nu\left(l\right) \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}\left(K\right) \tag{1.3.1}$$

zerlegt und die Desintegrationsabbildung von X entlang Y bezüglich der schwach-*-Topologie auf $\mathcal{C}(K)'$ stetig, das heißt

$$\forall\ (l_n)_n \subseteq L,\ f \in \mathcal{C}\left(K\right): \quad l_n \to l \in L \ \text{ impliziert } \ \mu_{l_n}\left(f\right) \to \mu_l\left(f\right).$$

1.3.5 Bemerkung
Mit Gleichung (1.3.1) ist für $f \in \mathrm{L}^1(K,\mu)$ und ν-fast alle $l \in L$ bereits $\mu_l(f) < \infty$. Durch Analyse des Beweises erkennen wir, dass es für dieses Resultat genügt, dass die Modelle verträglich mit i' sind, also nicht gefordert werden muss, dass sie verträglich bezüglich i sind.

Beweis (Theorem 1.3.4)
Es gilt für $0 \leq f \in \mathcal{C}(K)$

$$\begin{aligned}\int_L \mu_l\left(f\right) \mathrm{d}\nu\left(l\right) &= \int_L \delta_l\left(Pf\right) \mathrm{d}\nu\left(l\right) = \int_L \left(Pf\right)\left(l\right) \mathrm{d}\nu\left(l\right) = \langle Pf \mid \mathbb{1}_L\rangle = \langle f \mid i\mathbb{1}_L\rangle \\ &= \langle f \mid \mathbb{1}_K\rangle = \int_K f \cdot \mathbb{1}_K \,\mathrm{d}\mu = \int_K f \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu)}.\end{aligned}$$

Ist $(l_n)_n \subseteq L$ eine gegen $l \in L$ konvergente Folge, so folgt

$$\mu_{l_n}\left(f\right) = \delta_{l_n}\left(Pf\right) = \left(Pf\right)\left(l_n\right) \to \left(Pf\right)\left(l\right) = \delta_l\left(Pf\right) = \mu_l\left(f\right) \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}\left(K\right).$$

Also erfüllt $\mu_{(\cdot)}$ die gewünschte Regularität. ///

Da die Desintegrationsmaße μ_l durch den Rückzug der Punktmaße auf L unter i' definiert wurden und i durch eine stetige Abbildung $\pi : K \to L$ induziert ist, stellt sich die Frage, wie diese Maße mit der Abbildung π zusammenhängen. Wie im Fall einer endlichen Menge L erhalten wir, dass der Träger eines solchen Maßes μ_l innerhalb des Urbilds von $\{l\}$ unter π liegt.

1.3.6 Proposition (Träger der Desintegrationsmaße)
Für die Desintegrationsabbildung $\mu_{(\cdot)}$ von X entlang Y gilt

$$\mu_l\left(f\right) = 0 \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}\left(K\right) \text{ mit } \operatorname{supp} f \cap \pi^{-1}\left\{l\right\} = \emptyset \qquad \forall\, l \in L.$$

Insbesondere ist

$$\operatorname{supp}\mu_l \subseteq \pi^{-1}\left\{l\right\} \qquad \forall\, l \in L.$$

Beweis
Sei $l \in L$ und $f \in \mathcal{C}(K)$ mit $\operatorname{supp} f \cap \pi^{-1}\{l\} = \emptyset$, das heißt $l \notin \pi(\operatorname{supp} f)$. Die Menge $\pi(\operatorname{supp} f)$ ist kompakt, da $\operatorname{supp} f$ eine abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums K und π stetig sind. Wir wählen mit dem Lemma von Urysohn eine Funktion $g \in \mathcal{C}(L)$ mit $\operatorname{supp} g \cap \pi(\operatorname{supp} f) = \emptyset$ und $g(l) = 1$. Es folgt mit

$$\begin{aligned} ig \cdot f &= (g \circ \pi) \cdot f = (g \circ \pi) \cdot f \cdot \chi_{\pi^{-1}(\operatorname{supp} g)} \cdot \chi_{\operatorname{supp} f} \\ &= (g \circ \pi) \cdot f \cdot \chi_{\pi^{-1}(\operatorname{supp} g) \cap \operatorname{supp} f} = 0 \end{aligned}$$

bereits $0 = P(ig \cdot f) = g \cdot Pf$, also insbesondere

$$0 = \left(g \cdot Pf\right)\left(l\right) = g\left(l\right) \cdot \delta_l\left(Pf\right) = \left(P'\delta_l\right)\left(f\right) = \mu_l\left(f\right).$$

Für den letzten Schritt fassen wir μ_l mit dem Darstellungssatz von Riesz als Radonmaß auf K auf und beachten, dass $K \setminus \pi^{-1}(l)$ offen ist. Aufgrund der inneren Regularität folgt dann

$$\mu_l\Big(K \setminus \pi^{-1}\left(l\right)\Big) = \sup\left\{ \int f \,\mathrm{d}\mu_l \,\middle|\, \operatorname{supp} f \subseteq K \setminus \pi^{-1}\left(l\right),\ f \leq 1 \right\} = 0.$$

///

Kapitel 2

Integralräume, Bochnerräume und direkte Integrale

In Abschnitt 1.3 haben wir das Maß μ entlang eines Faktors in Maße μ_l zerlegt. Es stellt sich nun die Frage, ob bzw. wie sich dadurch eine Zerlegung des zugehörigen $\mathrm{L}^1(K,\mu)$ in die $\mathrm{L}^1(K,\mu_l)$-Räume ergibt. Dabei können wir kanonische Weise sofort eine stetige Funktion f auf K in mehrere Funktionen $f_l := f|_{\operatorname{supp}\mu_l}$ zerlegen und erhalten eine „Darstellung“ von f durch diese $f_l \in \mathcal{C}(\operatorname{supp}\mu_l)$. Andererseits können wir den umgekehrten Schritt nicht direkt durchführen. Sind $\{f_l \in \mathcal{C}(\operatorname{supp}\mu_l)\}_{l\in L}$ gegeben, so bilden diese im Allgemeinen **keine** stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(K)$ in dem wir f „abschnittsweise auf $\operatorname{supp}\mu_l$“ durch das zugehörige f_l definieren. Es fehlt eine Regularität „in l-Richtung“. Das einfachste Beispiel ist, wenn wir $K = L$ und $\mu = \nu$ wählen. Dann erkennen wir für $k \in K$ nämlich $\mu_k = \delta_k$ und damit ist jede Funktion, insbesondere auch jede unstetige Funktion, durch solche „abschnittsweisen Funktionen“ gegeben. Ein weiteres Problem, das wir an diesem Beispiel erkennen, ergibt sich, wenn wir für f lediglich $f \in \mathrm{L}^1(K,\mu)$ fordern. Dann ist die Einschränkung solcher Funktionen auf $\operatorname{supp}\mu_l$ nicht wohldefiniert, falls $\operatorname{supp}\mu_l$ eine μ-Nullmenge ist.

Um diese Problematik zu lösen, führen wir den allgemeinen Begriff des *Integralraums* ein und erkennen in Kapitel 3, dass dadurch die oben geschilderten Schwierigkeiten gelöst werden können. Bevor wir diese neue Struktur anwenden, erarbeiten wir losgelöst von obiger Problemstellung in Abschnitt 2.1 einige grundlegende Eigenschaften dieser Räume und betrachten in Abschnitt 2.2 gewisse Operatoren zwischen ihnen, die sogenannten *Diagonaloperatoren*. Die weiteren Abschnitten beschäftigen sich damit, Integralräume mit bekannten Strukturen zu vergleichen. So betrachten wir in Abschnitt 2.3 den Spezialfall, dass $\mu_{(\cdot)}$ konstant ist, und erkennen, dass in diesem Fall der Integralraum gerade ein *Bochnerraum* ist. Die letzten zwei Abschnitte zeigen einen Vergleich der *direkten Integralen von Hilberträumen* mit den hier eingeführten Integralräumen.

2.1 Integralräume

In diesem Abschnitt wird die Struktur des *Integralraums* eingeführt. Zunächst wird diese als Vervollständigung eines Funktionenraums definiert. Dafür seien im Folgenden K und L kompakte Räume und ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf L, sowie $\mu_{(\cdot)} : L \to \mathcal{P}(K) : l \mapsto \mu_l$ eine schwach messbare Abbildung, das heißt, dass für jedes $f \in \mathcal{C}(L)$ die Abbildung $\mu_{(\cdot)}(f) : L \to \mathbb{R} : l \mapsto \mu_l(f)$ messbar ist. Es sei angemerkt, dass wir für dieses

Kapitel einen etwas allgemeineren Kontext als den aus Kapitel 1 erlauben, indem wir nicht voraussetzen, dass K und L metrisch und separabel sind oder $\mu_{(\cdot)}$ stetig bezüglich der schwach-*-Topologie auf $\mathcal{C}(K)'$ ist.

2.1.1 Definition (Integralraum)
Für eine stetige Abbildung $f \in \mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K))$ auf L mit Werten in $\mathcal{C}(K)$ ist

$$|||f||| := |||f|||_{\mathrm{L}^1\left(L,\nu;\mathrm{L}^1\left(K,\mu_{(\cdot)}\right)\right)} := \int_L \|f\,(l)\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)}\,\mathrm{d}\nu\,(l)$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K))$ und definiert eine Äquivalenzrelation

$$f \sim g \;:\Longleftrightarrow\; |||f-g|||_{\mathrm{L}^1\left(L,\nu;\mathrm{L}^1\left(K,\mu_{(\cdot)}\right)\right)} = 0 \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{C}\left(L, \mathcal{C}\left(K\right)\right).$$

Die Vervollständigung von $\mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K))/\sim$ bezüglich $|||\cdot|||$ heißt *Integralraum von K entlang $\mu_{(\cdot)}$ bezüglich ν* und wird geschrieben als

$$\int_L \mathrm{L}^1\left(K, \mu_l\right)\mathrm{d}\nu\,(l)\,.$$

Die Vervollständigung eines Funktionenraums, bzw. eines Raums von Funktionenrestklassen, ist eine Menge von Restklassen von Cauchyfolgen des Raums. Insbesondere ist es zunächst nicht möglich die Elemente dieser Vervollständigung als Abbildungen auf L zu interpretieren. Wie jedoch durch die Schreibweise und die Motivation für diese Struktur schon angedeutet, ist es möglich diese Elemente im folgenden Sinn kanonisch als Abbildungen zu interpretieren.

2.1.2 Definition
Für $f \in \int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ ist eine Abbildung $\hat{f}$ auf L durch Wahl eines Restklassenvertreters $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K))$ von f durch $\hat{f}(l) := \lim_n f_n(l) \in \mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ definiert, falls dieser Limes ν-fast überall existiert.

2.1.3 Satz
Die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ aus Definition 2.1.2 ordnet einem f aus $\int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ eine Restklasse von paarweise ν-fast überall gleichen Abbildungen $\hat{f}$ auf L zu, dass für jede dieser Abbildungen $\hat{f}(l) \in \mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ für ν-fast alle $l \in L$ gilt. Diese Restklasse ist eindeutig und normerhaltend, das heißt

$$\int \left\|\hat{f}\,(l)\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)}\mathrm{d}\nu\,(l) = |||f|||\,.$$

Beweis
Sei $f \in \int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ und $(g_n)_n \subseteq \mathcal{C}(L,\mathcal{C}(K))$ mit $g_n \to f$ in $\int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$. Dann ist $(g_n)_n$ bezüglich der Integralraumnorm eine Cauchyfolge, das heißt

$$|||g_n - g_m||| = \int_L \left\|g_n(l) - g_m(l)\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \mathrm{d}\nu(l) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Wir wählen eine Teilfolge $(g_{N_n})_n =: (f_n)_n$ so, dass für $n \le m$ bereits $|||f_n - f_m||| \le 2^{-n}$ gilt und dass

$$\left\|f_n(l) - f_m(l)\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0 \qquad \text{für } \nu\text{-fast alle } l \in L.$$

Also ist für ν-fast alle $l \in L$ die Folge $(f_n(l))_n$ eine Cauchyfolge in $\mathrm{L}^1(K,\mu_l)$. Da diese Räume vollständig sind, existiert für ν-fast alle $l \in L$ ein $\hat{f}(l) := \lim_n f_n(l)$ in $\mathrm{L}^1(K,\mu_l)$. Insbesondere gilt für diese $l \in L$

$$\hat{f}(l) = f_n(l) - \sum_{k=n}^{\infty} \left(f_k(l) - f_{k+1}(l)\right) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Wir erkennen dass für ν-fast alle $l \in L$

$$\mu_l\left(\left|f_n(l) - \hat{f}(l)\right|\right) = \mu_l\left(\left|f_n(l) - \lim_{m\to\infty} f_m(l)\right|\right) = \lim_{m\to\infty} \mu_l\left(\left|f_n(l) - f_m(l)\right|\right)$$

gilt, insbesondere ist $l \mapsto \mu_l(|f_n(l) - \hat{f}(l)|)$ als ν-fast überall Limes messbarer Abbildungen selbst messbar. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\int_L \left\|f_n(l) - \hat{f}(l)\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \mathrm{d}\nu(l) &\le \int_L \left\|\sum_{k=n}^{\infty} \left(f_k(l) - f_{k+1}(l)\right)\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \mathrm{d}\nu(l) \\
&\le \sum_{k=n}^{\infty} \int_L \left\|f_k(l) - f_{k+1}(l)\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \mathrm{d}\nu(l) \\
&\le 2^{-n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt die Erhaltung der Norm, das heißt

$$\int \left\|\hat{f}(l)\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \mathrm{d}\nu(l) = |||f|||,$$

wobei die Abbildung $l \mapsto \|f(l)\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)}$ als ν-fast überall Limes von messbaren Abbildungen selbst messbar ist, also dieses Integral wohldefiniert ist.

Wir kommen nun zur Eindeutigkeit von $\hat{f}$. Sei $(h_n)_n \subseteq \mathcal{C}(L,\mathcal{C}(K))$ eine weitere Folge mit $h_n \to f$ in $\int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$. Es folgt

$$\int \left\|\hat{f}(l) - h_n(l)\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \mathrm{d}\nu(l) \le \left|\left|\left|\hat{f} - f_n\right|\right|\right| + |||f_n - h_n||| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Also gilt insbesondere für jede Teilfolge $(g_n)_n$ von $(h_n)_n$, die ν-fast überall konvergiert, dass diese punktweisen Limiten durch $\hat{f}$ gegeben sind. Damit ist die Abbildung wohldefiniert, das heißt unabhängig von der Wahl des Restklassenvertreter und der ν-fast überall konvergierenden Teilfolge. ///

2.1.4 Bemerkung
Aufgrund von Satz 2.1.3 fassen wir jedes Element

$$f \in \int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l)$$

des Integralraums als (Restklasse) einer Abbildung $\hat{f}$ auf L auf, wobei für ν-fast alle $l \in L$ bereits $\hat{f}(l) \in \mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ ist. Dabei liegen zwei Abbildungen in der gleichen Restklasse, falls sie sich nur auf einer ν-Nullmenge unterscheiden. Im Weiteren werden wir nicht zwischen f und $\hat{f}$ unterscheiden. Bezeichnet $\sim_\nu$ wieder die Äquivalenzrelation der ν-fast überall Gleichheit von Abbildungen auf L, so gilt also in dieser Interpretation des Integralraums

$$\int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l) \subseteq \prod_{l \in L} \mathrm{L}^1(K, \mu_l) \Big/ \sim_\nu .$$

Dadurch ergibt sich auf $\int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l)$ eine kanonische Verbandsstruktur.

Da $\mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K)) \cong \mathcal{C}(L \times K)$ gilt und durch

$$\eta(f) := |||f_+||| - |||f_-||| \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}(L \times K)$$

eine positive Linearform auf $\mathcal{C}(L \times K)$ definiert ist, ist η mit dem Darstellungssatz von Riesz ein Radon-Maß auf $L \times K$ und es gilt im Sinn einer Banachverbandsisomorphie

$$\int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l) \cong \mathrm{L}^1(L \times K, \eta) .$$

Insbesondere ist $\int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l)$ ein AL-Raum.

Es stellt sich nun die Frage, wann eine „punktweise gegebene Funktion“ ein Element des Integralraums ergibt, das heißt unter welchen Voraussetzungen die Abbildung $l \mapsto f_l$ als Element des Integralraums interpretiert werden kann, wenn für jedes $l \in L$ eine Funktion $f_l \in \mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ gegeben ist. Für eine mögliche Antwort nehmen wir das folgende Korollar aus Theorem 2.5.3, beziehungsweise aus der Analyse des Beweises, vorweg.

2.1.5 Satz
Sei f eine Abbildung auf L in die Funktionen von K nach $\mathbb{R}$ so, dass die Abbildung $F : L \to \mathbb{R} : l \mapsto \|f(l)\|_{\mathrm{L}^2(K, \mu_l)}$ ein Element aus $\mathrm{L}^2(L, \nu)$ ist. Ist $\mathcal{C}(K)$ separabel, so gilt genau dann $f \in \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l)$, wenn für alle $g \in \mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K))$ die Funktion

$$L \to [-\infty; \infty] : l \mapsto \int_K f(l) \cdot g(l)\, \mathrm{d}\mu_l$$

messbar ist.

Da wir $f \in \mathcal{C}(K)$ bzw. $g \in \mathcal{C}(L)$ durch $f \mapsto \mathbb{1}_L \otimes f$ bzw. $g \mapsto g \otimes \mathbb{1}_K$ in die stetigen Funktionen auf $L \times K$ einbetten können und $\mathcal{C}(L \times K) \cong \mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K))$ gilt, können wir auf natürliche Weise für $h \in \int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l)$ die Multiplikation mit f bzw. g definieren.

2.1.6 Bemerkung (Modulstruktur)
Der Integralraum $\int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu$ ist ein unitärer Modul über den kommutativen Ringen $\mathcal{C}(K)$ und $\mathcal{C}(L)$, in dem wir die Multiplikation durch

$$\mathcal{C}(K) \times \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l) \to \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu : (f, g) \mapsto f \cdot g := \big(l \mapsto f \cdot g(l)\big)$$

beziehungsweise

$$\mathcal{C}(L) \times \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l) \to \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu : (f, g) \mapsto f \cdot g := \big(l \mapsto f(l) \cdot g(l)\big)$$

definieren. Wir schreiben daher für $f \in \mathcal{C}(K)$ jeweils $\mathbb{1}_L \cdot f$ für die im Sinne

$$\big(f \cdot \mathbb{1}_L\big)(l) = f \qquad \text{als } \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\text{-Gleichheit}$$

konstante f Abbildung.

Auf Grund dieser Modulstruktur schreiben wir im Folgenden für $f \in \mathcal{C}(L)$ und $g \in \mathcal{C}(K)$ statt $f \otimes g$ nur $f \cdot g$ für die Abbildung $L \to \mathcal{C}(K) : l \mapsto f(l) \cdot g$.

Offensichtlich ist ein Operator auf einem Integralraum wohldefiniert, falls er dies auf einer dichten Teilmenge des Integralraums und dort beschränkt ist. Da wir uns in Abschnitt 2.2 mit gewissen Operatoren zwischen Integralräumen beschäftigen werden, ist es daher entscheidend zu wissen, was für Mengen dicht im Integralraum liegen.

2.1.7 Lemma (Dichtheit)
Ist $X = \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l)$ ein Integralraum, $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{L}^1(L, \nu)$ dicht und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(K)$ für alle $l \in L$ dicht in $\mathrm{L}^1(K, \mu_l)$, so liegt

$$\mathcal{B} \cdot \mathcal{A} = \mathrm{lin}_{\mathbb{Q}} \{g \cdot f \mid g \in \mathcal{B},\ f \in \mathcal{A}\}$$

dicht in X.

Beweis
Wir nehmen zunächst an, dass $\{\chi_B \mid B \subseteq L \text{ messbar}\} \subseteq \mathcal{B}$. Offensichtlich genügt es zu zeigen, dass mit Abbildung aus $\mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$ jede Abbildung aus $f \in \mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K))$ bezüglich der Integralraumnorm approximiert werden kann. Dafür wählen wir für $\varepsilon > 0$ und $l_0 \in L$ mittels der Dichtheit von $\mathcal{A}$ eine Funktion g_{l_0} so, dass

$$\|g_{l_0} - f(l_0)\|_{\mathrm{L}^1(K, \mu_{l_0})} < \varepsilon.$$

Des Weiteren wählen wir mit der Stetigkeit von f eine Umgebung $U_{l_0} \subseteq L$ von l_0 mit

$$\|f(l_0) - f(l)\|_{\mathcal{C}(K)} < \varepsilon \qquad \forall\, l \in U.$$

Offensichtlich überdeckt $\{U_l\}_{l\in L}$ bereits die ganze Menge L und aufgrund der Kompaktheit existieren $l_1, \ldots, l_n$ so, dass

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_{l_k} = L.$$

Wir bemerken für

$$A_k := U_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} U_{l_i},$$

dass $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ auch L überdecken und diese Mengen paarweise disjunkt sowie messbar sind. Definieren wir

$$g := \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} \cdot g_{l_k},$$

so erkennen wir $g \in \operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$ und

$$\begin{aligned} |||g - f||| &= \int_L \|g(l) - f(l)\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \,\mathrm{d}\nu(l) = \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \|g(l) - f(l)\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \,\mathrm{d}\nu(l) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} \Big(\|g_{l_k} - f(l_k)\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} + \|f(l_k) - f(l)\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \Big) \,\mathrm{d}\nu(l) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} 2\varepsilon \,\mathrm{d}\nu(l) = \int_{\bigcup_k A_k} 2\varepsilon \,\mathrm{d}\nu(l) = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Damit liegt $\operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} \mathcal{B} \cdot \mathcal{A}$ dicht in $\int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$, falls $\mathcal{B} \supseteq \{\chi_B \mid B \subseteq L \text{ messbar}\}$.

Sei nun $\mathcal{B}$ eine beliebige dichte Teilmenge von $\mathrm{L}^1(L, \nu)$. Auf Grund des ersten Schritts, genügt es, für messbares $B \subseteq L$ und $f \in \mathcal{A}$ zu zeigen, dass $\chi_B \cdot f$ durch Abbildungen in $\operatorname{lin}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{B} \cdot \mathcal{A})$ approximiert werden können. Nach Voraussetzung existieren $g_n \in \mathcal{B}$ mit $g_n \to \chi_B$ und für $f_n := g_n \cdot f$ gilt

$$\begin{aligned} |||\chi_B \cdot f - f_n||| &= \int \|(\chi_B \cdot f)(l) - f_n(l)\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \,\mathrm{d}\nu(l) \\ &= \int \|\chi_B(l) \cdot f - g_n(l) \cdot f\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \,\mathrm{d}\nu(l) \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{C}(K)} \cdot \int \|\chi_B - g_n\| \, d\nu \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

da $f \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(K)$, also $\|f\|_{\mathcal{C}(K)} < \infty$. Damit gilt die Aussage. ///

2.2 Operatoren zwischen Integralräumen

Es ist bekannt, dass Multiplikationsoperatoren auf einem L^1-Raum als punktweise Multiplikation mit einer geeigneten Funktion definiert sind. Dies können wir auf Integralräume verallgemeinern, in dem wir *Diagonaloperatoren*, das heißt „punktweise gegebene“ Operatoren, betrachten. Der folgende Abschnitt zeigt einige Eigenschaften solcher Operatoren.

2.2.1 Definition (Diagonale Operatoren)
Seien $X := \int_L \mathrm{L}^1(K;\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ und $Y := \int_L \mathrm{L}^1(\widetilde{K},\widetilde{\mu}_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ Integralräume. Existiert für alle $l \in L$ ein Operator $T_l \in \mathcal{L}(\mathrm{L}^1(K,\mu_l),\mathrm{L}^1(\widetilde{K},\widetilde{\mu}_l))$ so, dass

$$\int T_l \,\mathrm{d}\nu\,(l) : X \to Y : f \mapsto \Big(l \mapsto T_l\,(f\,(l))\Big)$$

ein stetiger Operator von X nach Y ist, so heißt $\int T_l\,\mathrm{d}\nu(l)$ *Diagonaloperator*, der durch die *punktweisen Operatoren* $\{T_l\}_l$ induziert ist.

Natürlich können wir die selbige Konstruktion auch für Linearformen durchführen.

2.2.2 Definition (Diagonale Linearformen)
Existiert für alle $l \in L$ eine stetige Linearform $\varphi_l : \mathrm{L}^1(K,\mu_l) \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\int \varphi_l \,\mathrm{d}\nu\,(l) : X \to \mathbb{R} : f \mapsto \int \varphi_l\,(f\,(l))\,\mathrm{d}\nu\,(l)$$

stetig ist, so heißt $\int \varphi_l\,\mathrm{d}\nu(l)$ *diagonale Linearform*, die durch die *punktweisen Linearformen* $\{\varphi_l\}_l$ induziert ist.

Betrachten wir einen L^1-Raum, so erkennen wir, dass die Funktion, über die ein Multiplikationsoperator definiert ist, immer gewisse Regularität erfüllt. Insbesondere muss die Funktion f, die einen Operator durch punktweise Multiplikation definiert, messbar und beschränkt sein, das heißt $f \in \mathrm{L}^\infty(L,\nu)$. Im Fall eines Integralraums stellt sich eine äquivalente Frage: Welche Regularität muss erfüllt sein, damit, falls für jeden Punkt $l \in L$ ein Operator T_l auf $\mathrm{L}^1(K,\mu_l)$ gegeben ist, ein Diagonaloperator induziert wird.

2.2.3 Proposition (Punktweise gegebene Operatoren)
Seien $X = \int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ und $Y = \int_L \mathrm{L}^1(\widetilde{K},\widetilde{\mu}_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ Integralräume und $\mathbb{T} = \{T_l\}_l$ eine Familie von punktweisen Operatoren, also $T_l : \mathrm{L}^1(K,\mu_l) \to \mathrm{L}^1(\widetilde{K},\widetilde{\mu}_l)$, so, dass $F : L \to \mathbb{R} : l \mapsto \|T_l\| \in \mathrm{L}^\infty(L,\nu)$ und

$$(l \mapsto T_l\,(f)) \in Y \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}\,(K)\,.$$

Dann ist der Operator $T := \int_L T_l \, \mathrm{d}\nu(l) \in \mathcal{L}(X, Y)$ wohldefiniert mit

$$\|T\| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{l \in L} \|T_l\| =: C_{\mathbb{T}}.$$

Beweis
Wir erkennen sofort, dass für $f \in \mathcal{C}(K)$ und $g \in \mathcal{C}(L)$ bereits

$$\Big(l \mapsto T_l\left(g\left(l\right) \cdot f\right) = g\left(l\right) \cdot T_l\left(f\right)\Big) = g \cdot Tf \in Y.$$

Also ist T auf $\mathcal{A} := \operatorname{lin}\{g \cdot f \mid f \in \mathcal{C}(K),\ g \in \mathcal{C}(L)\}$ wohldefiniert.

Für $l \in L$ bezeichne $X_l := \mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ und $Y_l := \mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l)$. Ist $f \in \mathcal{A}$ beliebig, so gilt

$$\begin{aligned} |||Tf|||_Y &= \int_L \|T_l\left(f\left(l\right)\right)\|_{\mathrm{L}^1\left(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l\right)} \mathrm{d}\nu\left(l\right) \\ &\leq \int_L \operatorname*{ess\,sup}_{l \in L} \|T_l\| \cdot \|f\left(l\right)\|_{\mathrm{L}^1(K, \mu_l)} \mathrm{d}\nu\left(l\right) = C_{\mathbb{T}} \cdot |||f|||_X . \end{aligned}$$

Insbesondere gilt, wenn $(h_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ eine Cauchyfolge bezüglich $|||\cdot|||_X$ ist, dass $(Th_n)_n$ eine Cauchyfolge bezüglich $|||\cdot|||_Y$ ist. Da für $f \in X$ nach Lemma 2.1.7 eine Folge $(h_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ existiert so, dass $h_n \to f$ in X, folgt die Wohldefiniertheit von T auf X. Mit der obigen Normabschätzung folgt die Aussage. ///

2.2.4 Bemerkung
Offensichtlich genügt es in Proposition 2.2.3 die Wohldefiniertheit für die Elemente einer Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(K)$ zu fordern, die für ν-fast alle $l \in L$ dicht in $\mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ liegt. Selbiges gilt für die folgenden Proposition 2.2.6 und Satz 2.3.8.

Die Bedingung, dass $\mathbb{T}$ eine Regularität „in L-Richtung“ erfüllt, ist ebenso wie im skalaren Fall notwendig. Wir geben dafür ein kurzes Gegenbeispiel punktweiser Operatoren, die diese Bedingung verletzen und trotz jeweils einzelner Regularität keinen Diagonaloperator induzieren.

2.2.5 Beispiel (Ohne gemeinsame Regularität)
Ist $U \subseteq [0; 1]$ eine nicht bezüglich des Lebesgue-Maßes messbare Menge und definieren wir für $l \in [0; 1]$

$$T_l : \mathrm{L}^1\left(K, \mu_l\right) = \mathrm{L}^1\left([0;1], \mathcal{L}^1\right) \to \mathrm{L}^1\left([0;1], \mathcal{L}^1\right) : f \mapsto \begin{cases} f & : l \in L \\ -f & : l \notin L \end{cases},$$

wobei $\mathcal{L}^1$ das Lebesgue-Maß auf $[0; 1]$ bezeichnet, so sind offensichtlich alle T_l isometrische Banachraum-Isomorphismen. Jedoch ist die Abbildung

$$L \to \mathrm{L}^1\left(K, \mu_l\right) : l \mapsto T_l\left(\mathbb{1}_K\right)$$

nicht durch Abbildungen aus $\mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K))$ approximierbar, da sonst auch $\chi_L - \chi_{[0;1]\setminus L}$ durch $\mathcal{C}(L)$ Funktionen approximierbar wäre, was der nicht-Messbarkeit von L widerspricht. Insbesondere induzieren die T_l keinen Diagonaloperator auf $\int \mathrm{L}^1([0;1], \mathcal{L}^1)\, \mathrm{d}\mathcal{L}^1$, da dieser nicht auf allen Integralraum-Elementen wohldefiniert ist.

Wir können dieses Beispiel noch erweitern, in dem wir einen isometrischen Banachverbandsisomorphismus $S : \mathrm{L}^1([0;1]; \mathcal{L}^1) \to \mathrm{L}^1([0;1]; \mathcal{L}^1)$ mit $S \neq \mathrm{id}$, beispielsweise den Rechts-Shift, wählen und für $l \notin L$ statt $T_l(f) = -f$ einfach $T_l f = Sf$ setzen.

Unter weiteren Voraussetzungen können wir die Ungleichung der Normen in Proposition 2.2.3 zu einer Gleichung verbessern.

2.2.6 Proposition
Seien $\mathcal{C}(K)$ separabel und $X = \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l)$ und $Y = \int_L \mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l)\, \mathrm{d}\nu(l)$ Integralräume so, dass die Abbildungen

$$\mu_{(\cdot)} : L \to \mathcal{P}(K) : l \mapsto \mu_l, \qquad \widetilde{\mu}_{(\cdot)} : L \to \mathcal{P}\left(\widetilde{K}\right) : l \mapsto \widetilde{\mu}_l$$

stetig bezüglich der schwach-*-Topologie auf $\mathcal{C}(K)'$ bzw. $\mathcal{C}(\widetilde{K})'$ sind und

$$\mathbb{T} = \left\{T_l \in \mathcal{L}\left(\mathrm{L}^1(K, \mu_l), \mathrm{L}^1\left(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l\right)\right)\right\}_l$$

eine Familie so, dass für alle $f \in \mathcal{C}(K)$ die Abbildungen $l \mapsto \|T_l f\|_{\mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l)}$ stetig ist und $(l \mapsto T_l f) \in Y$ gilt. Dann ist genau dann $\operatorname{ess\,sup}_l \|T_l\| < \infty$, wenn $T := \int T_l\, \mathrm{d}\nu(l)$ wohldefiniert ist. Und in diesem Fall gilt $l \mapsto \|T_l\| \in \mathrm{L}^\infty(L, \nu)$ mit $\operatorname{ess\,sup}_l \|T_l\| = \|T\|$.

Beweis
Wir zeigen zunächst, dass in beiden Fällen, $l \mapsto \|T_l\|$ messbar ist. Dafür sei $\mathcal{A}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge von $\mathcal{C}(K)$ und wir bemerken, dass, wenn wir $\frac{0}{0} = 0$ setzen,

$$l \mapsto \|T_l\| = \sup_{f \in \mathcal{A}} \frac{\|T_l f\|_{\mathrm{L}^1\left(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l\right)}}{\|f\|_{\mathrm{L}^1(K, \mu_l)}}$$

das Supremum abzählbar vieler, messbarer Abbildungen ist, da nach Voraussetzung für alle $f \in \mathcal{C}(K)$ die Abbildungen

$$l \mapsto \|f\|_{\mathrm{L}^1(K, \mu_l)} \quad \text{und} \quad l \mapsto \|T_l(f)\|_{\mathrm{L}^1\left(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l\right)}$$

messbar sind. Also ist diese Funktion messbar.

Insbesondere folgt mit Proposition 2.2.3 und Lemma 2.1.7, dass unter beiden Voraussetzungen T wohldefiniert ist. Weiter genügt es nach Proposition 2.2.3 $\operatorname{ess\,sup}_l \|T_l\| \leq$

$\|T\|$ zu zeigen, um die gesamte Aussage zu erhalten. Dafür wählen wir für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $l_0 \in \operatorname{supp} \nu \subseteq L$ und $0 \neq f \in \mathcal{C}(K)$ mit

$$\frac{\|T_{l_0} f\|_{\mathrm{L}^1\left(\widetilde{K},\widetilde{\mu_{l_0}}\right)}}{\|f\|_{\mathrm{L}^1\left(K,\mu_{l_0}\right)}} \geq \|T_{l_0}\| - \varepsilon \geq \operatorname*{ess\,sup}_{l\in L} \|T_l\| - 2\varepsilon =: C - 2\varepsilon.$$

Wir wählen eine Umgebung U von l_0 so, dass für alle $l \in U$ bereits

$$\frac{\|T_l f\|_{\mathrm{L}^1\left(\widetilde{K},\widetilde{\mu_{l_0}}\right)}}{\|f\|_{\mathrm{L}^1\left(K,\mu_{l_0}\right)}} \geq C - 3\varepsilon.$$

Damit gilt für $g := f \cdot \chi_U \neq 0$ bereits

$$\begin{aligned} |||Tg||| &= \int \|T_l g_l\|_{\mathrm{L}^1\left(\widetilde{K},\widetilde{\mu}_l\right)} \,\mathrm{d}\nu\,(l) = \int_U \|T_l f\|_{\mathrm{L}^1\left(\widetilde{K},\widetilde{\mu}_l\right)} \,\mathrm{d}\nu\,(l) \\ &\geq \int_U (C - 3\varepsilon) \cdot \|f\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \,\mathrm{d}\nu\,(l) = (C - 3\varepsilon) \cdot \int \|_U f\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \,\mathrm{d}\nu\,(l) \\ &= (C - 3\varepsilon) \cdot \int \|g\,(l)\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \,\mathrm{d}\nu\,(l) = (C - 3\varepsilon) \cdot |||g||| \,. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die $\|T\| = C = \operatorname{ess\,sup}_l \|T_l\|$. ///

Nun stellt sich die Frage, welche Eigenschaften der punktweise gegebenen Operatoren sich auf den zugehörigen Diagonaloperator übertragen. Als erste solcher Eigenschaften erhalten wir direkt aus den jeweiligen Definitionen die Injektivität, Isometrie, Positivität und Verbandsoperatoreigenschaft.

2.2.7 Proposition (Punkteigenschaften)
Seien X, Y, T und T_l wie in Proposition 2.2.3. Ist T_l für ν-fast alle $l \in L$ injektiv bzw. isometrisch bzw. positiv bzw. Markovsch bzw. ein Verbandsoperator, so ist T injektiv bzw. isometrisch bzw. positiv bzw. Markovsch bzw. ein Verbandsoperator.

Wie im skalaren Fall genügt es dagegen nicht, dass ein Diagonaloperator punktweise durch Surjektionen gegeben ist, damit dieser selbst surjektiv ist. Insbesondere ist ein Diagonaloperator, der punktweise ein Isomorphismus ergibt, nicht unbedingt ein Isomorphismus zwischen den zugehörigen Integralräumen. Wir erkennen, dass die punktweisen inversen Operatoren genau dann einen Diagonaloperator definieren, wenn der zugehörige Diagonaloperator invertierbar bzw. surjektiv ist.

2.2.8 Proposition (Isomorphismen)
Sei $T := \int_L T_l \,\mathrm{d}\nu(l) \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein Diagonaloperator zwischen zwei Integralräumen $X := \int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ und $Y := \int \mathrm{L}^1(\widetilde{K},\widetilde{\mu}_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$. Falls für alle $l \in L$ der Operator $T_l : \mathrm{L}^1(K,\mu_l) \to \mathrm{L}^1(\widetilde{K},\widetilde{\mu}_l)$ invertierbar ist, so gilt genau dann $S := \int_L T_l^{-1}\,\mathrm{d}\nu(l) \in \mathcal{L}(Y,X)$, falls T surjektiv ist und in diesem Fall sind T und S invertierbar mit $T^{-1} = S$.

Beweis
Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ surjektiv und sind alle T_l bijektiv, so ist nach Proposition 2.2.7 T injektiv und surjektiv, also bijektiv und damit invertierbar. Offensichtlich gilt dann $S = T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Gilt andererseits $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $S \in \mathcal{L}(Y, X)$, so gilt offensichtlich $S = T^{-1}$. Insbesondere ist T dann surjektiv. ///

Wir betrachten nun den umgekehrten Fall, also dass ein diagonaler Operator gewisse Eigenschaften hat, und versuchen zu schließen, welche Eigenschaften sich dann auf die punktweisen Operatoren übertragen. Zur Vereinfachung setzen wir dabei $\mathcal{C}(K)$ und $\mathcal{C}(\widetilde{K})$ als separabel voraus. Es sei bemerkt, dass für alle Beweise wieder ausreichen würde, dass abzählbare Mengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(K)$ und $\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{C}(\widetilde{K})$ existieren so, dass $\mathcal{A}$ bzw. $\widetilde{\mathcal{A}}$ für ν-fast alle $l \in L$ dicht in $\mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ bzw. $\mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l)$ liegt. Um die Aussagen etwas zu verkürzen, werden wir dies nicht weiter beachten.

Wieder ergibt sich die gewünschte Aussage einfach für die Isometrie, Positivität und Verbandsoperatoreigenschaft eines Operators.

2.2.9 Proposition
Sei $T = \int_L T_l \,\mathrm{d}\nu(l) \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein Diagonaloperator zwischen zwei Integralräumen $X := \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l) \,\mathrm{d}\nu(l)$ und $Y := \int_L \mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l) \,\mathrm{d}\nu(l)$, wobei $\mathcal{C}(K)$ separabel sei. Ist T isometrisch bzw. positiv bzw. ein Verbandsoperator, so ist T_l für ν-fast alle $l \in L$ isometrisch bzw. positiv bzw. ein Verbandsoperator.

Beweis
Wir setzen $X_l := \mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ und $Y_l := \mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l)$ für $l \in L$ und es sei $\mathcal{A}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge von $\mathcal{C}(K)$. Es sei zunächst angenommen, dass für alle $f \in \mathcal{A}$ und ν-fast alle $l \in L$ bereits $\|T_l f\|_{Y_l} = \|f\|_{X_l}$ bzw. $T_l(|f|) \geq 0$ bzw. $T_l(|f|) = |T_l f|$ gilt. Mit der Abzählbarkeit von $\mathcal{A}$ folgt für eine ν-Nullmenge $N \subseteq L$

$$\|T_l f\|_{Y_l} = \|f\|_{X_l} \text{ bzw. } T_l\left(|f|\right) \geq 0 \text{ bzw. } T_l\left(|f|\right) = |T_l f| \qquad \forall\, f \in \mathcal{A},\ l \in L \setminus N.$$

Da für alle $l \in L$ die Menge $\mathcal{A}$ dicht in $\mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ liegt, impliziert die Stetigkeit von T_l, dass für alle $l \in L \setminus N$ der Operator T_l isometrisch bzw. positiv bzw. ein Verbandsoperator ist. Es bleibt also nur noch obige Annahme zu zeigen.

Sei nun T isometrisch und $f \in \mathcal{A}$ beliebig. Ist

$$A_f := \left\{ l \in L \;\middle|\; \|T_l f\|_{Y_l} > \|f\|_{X_l} \right\},$$

so ist A_f messbar, da diese Menge das Urbild von $(0, \infty]$ unter der Abbildung $l \mapsto \|T_l f\|_{Y_l} - \|f\|_{X_l}$ ist diese messbar ist, da nach Voraussetzung $(l \mapsto T_l f) \in Y$. Damit gilt $\chi_{A_f} \cdot f \in X$ und, da T eine Isometrie ist, folgt

$$\int_{A_f} \|f\|_{X_l} \,\mathrm{d}\nu\left(l\right) = \left\|\left| T\left(\chi_{A_f} \cdot f\right) \right|\right\| = \int_{A_f} \|T_l f\|_{Y_l} \,\mathrm{d}\nu\left(l\right) \geq \int_{A_f} \|f\|_{X_l} \,\mathrm{d}\nu\left(l\right).$$

Also ist $\nu(A_f) = 0$, da für alle $l \in A_f$ bereits $\|f\|_{X_l} < \|T_l f\|_{Y_l}$ gilt. Durch ein äquivalentes Argument erhalten wir, dass nur auf einer ν-Nullmenge $\|T_l f\|_{Y_l} < \|f\|_{X_l}$ gelten kann. Somit ist $\|T_l f\|_{Y_l} = \|f\|_{X_l}$ fast überall bezüglich ν. Damit gilt im isometrischen Fall die Annahme.

Für die Fälle, dass T positiv bzw. ein Verbandsoperator ist, gilt für beliebiges $f \in \mathcal{A}$ per Definition $T(\mathbb{1}_L \cdot |f|) \geq 0$ bzw. $T(|\mathbb{1}_L \cdot f|) = |T(\mathbb{1}_L \cdot f)$. Insbesondere ist

$$T_l\left(|f|\right) = T\left(\mathbb{1}_L \cdot |f|\right)(l) \geq 0 \qquad \text{für } \nu\text{-fast alle } l \in L$$

bzw.

$$|T_l f| = \big|\left(T\left(\mathbb{1}_L \cdot f\right)\right)(l)\big| = T\left(|\mathbb{1}_L \cdot f|\right)(l) = T_l\left(|f|\right) \qquad \text{für } \nu\text{-fast alle } l \in L.$$

Damit gilt auch in diesen Fällen die Annahme. ///

Wieder ist die Surjektivität diejenige Eigenschaft, deren „Vererbung“ sich schwieriger zeigen lässt. Für den Beweis wird das folgende technische Lemma benötigt, welches besagt, dass ein Operator $T : X \to Y$ zwischen Integralräumen $X = \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ und $Y = \int_L \mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ mit Hilfe des Auswahlaxioms eine (nicht eindeutige) lineare Abbildung von $\mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K))$ in den Produktraum $\prod_l \mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l)$ induziert. Das heißt, wir können durch T einem $f \in \mathcal{C}(L; \mathcal{C}(K))$ nicht nur eine *Restklasse von Produktraumelementen* zuordnen, wie uns Satz 2.1.3 liefert, sondern können sogar in linearer Weise ein *Produktraumelement* $Tf \in \prod_l \mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l)$ auswählen. Dies wird es uns ermöglichen, die Inverse ν-fast aller $T_l : \mathrm{L}^1(K, \mu_l) \to \mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l)$ anzugeben, falls T der Diagonaloperator $T = \int_L T_l\,\mathrm{d}\nu(l)$ ist.

Für die Formulierung des Lemmas bezeichnet ϖf bzw. $\widetilde{\varpi}\widetilde{f}$ die Projektion eines Elementes $f \in \prod_l \mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ bzw. $\widetilde{f} \in \prod_l \mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l)$ auf die Restklasse der paarweise ν-fast überall übereinstimmenden solchen Elemente.

2.2.10 Lemma

Ist U eine lineare Abbildung zwischen Integralräumen $X := \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ und $Y := \int_L \mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$, dann existiert eine derartige lineare Abbildung $\overline{U} : \mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K)) \to \prod_l \mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l)$, dass für die obige Projektionen ϖ und $\widetilde{\varpi}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K)) \arrow[r, "\overline{U}"] \arrow[d, "\varpi"] & \widetilde{\varpi}^{-1}(Y) \subseteq \prod_{l \in L} \mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \widetilde{\mu}_l) \arrow[d, "\widetilde{\varpi}"] \\
\pi(C(L, \mathcal{C}(K))) \subseteq X \arrow[r, "U"] & Y
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis
Wir erkennen, dass $\mathcal{C}(L,\mathcal{C}(K))$ sowie $\widetilde{\varpi}^{-1}(Y)$ Vektorräume sind, sowie

$$\mathcal{A}_0 := \left\{ f \in \mathcal{C}\left(L,\mathcal{C}\left(K\right)\right) \,\middle|\, \|f_l\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} = 0 \text{ für } \nu\text{-fast alle } l \in L \right\} = \varpi^{-1}\left(0\right)$$

und

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0 := \left\{ f \in \widetilde{\varpi}^{-1}\left(Y\right) \,\middle|\, \|f_l\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} = 0 \text{ für } \nu\text{-fast alle } l \in L \right\} = \widetilde{\varpi}^{-1}\left(0\right)$$

lineare Unterräume dieser Räume sind. Außerdem ist

$$S : \varpi\left(\mathcal{C}\left(L,\mathcal{C}\left(K\right)\right)\right) = \left(\mathcal{C}\left(L,\mathcal{C}\left(K\right)\right)/\mathcal{A}_0\right) \to Y = \left(\widetilde{\varpi}^{-1}\left(Y\right) \Big/ \widetilde{\mathcal{A}_0}\right)$$

nach Satz 2.1.3 wohldefiniert und linear. Also folgt mit der in Proposition A.2.1 ausgeführten Anwendung des Auswahlaxioms die Aussage. ///

Nun können wir zur Betrachtung der „Vererbung" der Surjektivität übergehen. Zur weiteren Vereinfachung betrachten wir dabei nur isometrische Operatoren.

2.2.11 Proposition
Sei $T = \int_L T_l \,\mathrm{d}\nu(l) \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein Diagonaloperator zwischen zwei Integralräumen $X := \int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ und $Y := \int_L \mathrm{L}^1(\widetilde{K},\widetilde{\mu}_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$, der isometrisch und surjektiv ist, wobei $\mathcal{C}(K)$ und $\mathcal{C}(\widetilde{K})$ separabel sind. Dann ist T_l für ν-fast alle $l \in L$ isometrisch und surjektiv. Des Weiteren ist T^{-1} ein Diagonaloperator mit $T^{-1} = \int T_l^{-1}\,\mathrm{d}\nu(l)$.

Beweis
Wir setzen $X_l := \mathrm{L}^1(K,\mu_l)$ und $Y_l := \mathrm{L}^1(\widetilde{K},\widetilde{\mu}_l)$ für $l \in L$. Es sei $\mathcal{A}$ bzw. $\widetilde{\mathcal{A}}$ ein abzählbarer, dichter Teilraum über $\mathbb{Q}$ von $\mathcal{C}(K)$ bzw. $\mathcal{C}(\widetilde{K})$. Nach dem vorangehenden Lemma 2.2.10 können wir annehmen, dass T^{-1} Abbildungen aus $\mathcal{C}(L,\mathcal{C}(\widetilde{K}))$ linear auf Elemente aus $\prod_l X_l$ zuordnet. Wir definieren damit für $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{A}}$

$$S_l\widetilde{f} := T^{-1}\left(\mathbb{1}_L \cdot \widetilde{f}\right)(l)\,.$$

Insbesondere können wir die so definierte Abbildung S_l als lineare Abbildung auf $\widetilde{\mathcal{A}}$ mit Werten in X_l auffassen, wobei die Homogenität nur über $\mathbb{Q}$ gilt. Wir beachten, dass für $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ außerhalb einer ν-Nullmenge

$$\left(T\left(T^{-1}\left(\mathbb{1}_L \cdot \widetilde{f}\right)\right)\right)(l) = \mathbb{1}_L\left(l\right) \cdot \widetilde{f} = \widetilde{f}$$

und für $f \in \mathcal{A}$ außerhalb einer weiteren ν-Nullmenge

$$\left(T^{-1}\left(T\left(\mathbb{1}_L \cdot f\right)\right)\right)(l) = \mathbb{1}_L\left(l\right) \cdot f = f$$

gilt. Damit folgt für ν-fast alle $l \in L$ bereits

$$T_l\left(S_l\widetilde{f}\right) = T_l\left(\left(T^{-1}\left(\mathbb{1}_L \cdot \widetilde{f}\right)\right)(l)\right) = \left(T\left(T^{-1}\left(\mathbb{1}_L \cdot \widetilde{f}\right)\right)\right)(l) = \mathbb{1}_L\left(l\right) \cdot \widetilde{f} = \widetilde{f}$$

und

$$S_l\left(T_l f\right) = \left(T^{-1}\left(\underbrace{\mathbb{1}_L \cdot T_l\left(f\right)}_{=(l \mapsto T_l(f))}\right)\right)(l) = \left(T^{-1}\underbrace{\left(T\left(\mathbb{1}_L \cdot f\right)\right)}_{=(l \mapsto T(\mathbb{1}_L f)(l))}\right)(l) = \mathbb{1}_L\left(l\right) \cdot f = f.$$

Da $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ abzählbar sind, gilt also für eine ν-Nullmenge A bereits

$$S_l\left(T_l f\right) = f \quad \text{und} \quad T_l\left(S_l \widetilde{f}\right) = \widetilde{f} \qquad \forall\, f \in \mathcal{A},\ \widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{A}},\ l \in L \setminus A.$$

Des Weiteren gilt nach Proposition 2.2.9 für ν-fast alle $l \in L$ bereits

$$\left\|S_l\left(T_l f\right)\right\|_{X_l} = \|f\|_{X_l} = \|T_l f\|_{Y_l} \qquad \forall\, f \in \mathcal{A}.$$

Da $\mathcal{A}$ für alle $l \in L$ dicht in $\mathrm{L}^1(L, \mu_l)$ liegt, können wir insgesamt also für ν-fast alle $l \in L$ die Abbildung S_l zu einem isometrischen, linearen Operator $S_l : Y_l \to X_l$ fortsetzen und es gilt nach Obigem $S_l = T_l^{-1}$. Mit Proposition 2.2.8 folgt schließlich $T^{-1} = \int_L S_l \,\mathrm{d}\nu(l)$. ///

2.3 Integralräume und Bochnerräume

Betrachten wir die Definition des Integralraums, so erkennen wir, dass durch $\mu_{(\cdot)} \equiv \eta$ ein einfacher Spezialfall gegeben ist. In diesem Fall gilt für ein Element f des Integralraums $\int \mathrm{L}^1(K, \mu_l) \,\mathrm{d}\nu(l)$ nämlich $f(l) \in \mathrm{L}^1(K, \eta)$ für ν-fast alle $l \in L$. Das heißt der „Zielraum“ hängt nicht von $l \in L$ ab. Damit ist $\int \mathrm{L}^1(K, \mu_l) \,\mathrm{d}\nu(l)$ ein Bochnerraum. Eine ausführlichere Einführung in die Theorie zu Bochnerräumen ist beispielsweise in [Růž04, Kap. 2] zu finden.

Um dieses Ergebnis zu präzisieren, wiederholen wir die Definition des Bochnerraums. Dafür muss zunächst ein passender Begriff der Messbarkeit definiert werden. Wie üblich definieren wir diesen durch Approximation durch einfache Abbildungen und bilden Restklassen von paarweise ν-fast überall übereinstimmenden Abbildungen.

2.3.1 Definition (Bochnerraum)
Sei L ein Kompaktum und ν ein endliches Radonmaß auf K, sowie X ein Banachraum. Eine Abbildung $s : L \to X$ heißt *einfach*, falls die Menge $\operatorname{Bild} s$ endlich ist und in diesem Fall nennen wir s *(Bochner-)messbar*, falls für alle $x \in X$ die Menge $s^{-1}(x)$ messbar ist. Ist s eine einfache, messbare Abbildung, so ist das *Integral von s* durch die endliche Summe

$$\int s \,\mathrm{d}\nu := \sum_{x \in X} x \cdot \nu\left(s^{-1}\left(x\right)\right)$$

definiert. Eine Abbildung $f : L \to X$ heißt *(Bochner-)messbar*, falls messbare, einfache Abbildungen $s_n : L \to X$ existieren so, dass für alle $l \in L$ außerhalb eine ν-Nullmenge

$$f\left(l\right) = \lim_{n \to \infty} s_n\left(l\right)$$

gilt. Ist außerdem

$$\int_{\Omega} \|f(l) - s_n(l)\|_X \, d\nu \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

erfüllt, so heißt f *(Bochner-)integrierbar* und das *(Bochner-)Integral* ist durch

$$\int f \,\mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int s_n \,\mathrm{d}\nu,$$

sowie die *Bochner-Norm* durch

$$\|f\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} := \int \|f(l)\|_X \,\mathrm{d}\nu(l)$$

gegeben. Für Bochner-messbare Abbildungen $f, g : L \to X$ ergibt sich eine Äquivalenzrelation $f \sim g :\iff \|f - g\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} = 0$ und der *Bochnerraum* ist definiert durch

$$\mathrm{L}^1(L,\nu;X) := \left\{ f : L \to X \;\middle|\; f \text{ messbar}, \; \|f\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} < \infty \right\} \Big/ \sim .$$

Daraus ergeben sich zwei Fragen der Wohldefiniertheit. Einmal für die Norm, da zunächst nicht klar ist, warum $l \mapsto \|f(l)\|_X$ für Bochner-messbares f wieder messbar ist und zum zweiten für die des Bochner-Integrals. Diese technischen Feinheiten werden in Proposition 2.3.2 und Proposition 2.3.3 gezeigt.

2.3.2 Proposition (Wohldefiniertheit der Norm)
Ist $f : L \to X$ Bochner-messbar, so ist $L \to \mathbb{R} : l \mapsto \|f(l)\|_X$ Borel-messbar. Insbesondere ist $\|f\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)}$ wohldefiniert.

Beweis
Für Bochner-messbares $f : L \to X$ existieren Bochner-messbare, einfache Abbildungen $s_n : L \to X$ so, dass $s_n(l) \xrightarrow{n\to\infty} f(l)$ für ν-fast alle $l \in L$. Insbesondere ist $\|s_n\|_X : L \to X : l \mapsto \|s_n(l)\|_X$ eine messbare, einfache Funktion und es gilt $\|s_n(l)\|_X \to \|f(l)\|_X$ fast überall bezüglich ν. Damit ist $L \to \mathbb{R} : l \mapsto \|f(l)\|_X$ als fast-überall Limes von messbaren, einfachen Funktionen selbst messbar. ///

2.3.3 Proposition (Wohldefiniertheit des Bochner-Integrals)
Ist $f : L \to X$ Bochner-integrierbar, so ist $\int f \,\mathrm{d}\nu$ wohldefiniert.

Beweis
Für Bochner-integrierbares $f : L \to X$ existieren Bochner-messbare, einfache Abbildungen $s_n : L \to X$ so, dass $s_n(l) \xrightarrow{n\to\infty} f(l)$ für ν-fast alle $l \in L$ und $\|f - s_n\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} \to 0$. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}\left\|\int s_n \,\mathrm{d}\nu - \int s_m \,\mathrm{d}\nu\right\| &\leq \int \|s_n - s_m\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} \,\mathrm{d}\nu \\ &\leq \|s_n - f\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} + \|f - s_m\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Also bilden diese eine Cauchyfolge und mit der Vollständigkeit von X ist das Bochnerintegral definiert. Die Wohldefiniertheit, also Unabhängigkeit von der approximierenden Folge, ist offensichtlich, da $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)}$ eine Norm ist. ///

Die nächste Frage, die sich natürlich stellt, ist, ob sich wie im Fall der Lebesgue-Räume vollständige Räume ergeben.

2.3.4 Theorem
Der Bochnerraum $\mathrm{L}^1(L, \nu; X)$ ist ein Banachraum.

Beweis
Sei $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathrm{L}^1(L, \nu; X)$. Da es genügt, die Konvergenz einer Teilfolge nachzuweisen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\|f_n - f_{n+1}\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} \leq 2^{-n-1}$. Per Definition existieren einfache, messbare Abbildungen s_n^k so, dass $s_n^k \to f_n$. Nach Übergang zu Teilfolgen gilt $\|f_n - s_n^n\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} \leq 2^{-n-1}$, also auch $\|s_n^n - s_{n+1}^{n+1}\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} \leq 2^{-n}$. Nach erneutem Übergang zu einer Teilfolge können wir davon ausgehen, dass $\|s_n^n(l) - s_{n+1}^{n+1}(l)\|$ für ν-fast alle $l \in L$ gegen 0 geht. Da X vollständig ist, konvergiert $s_n^n(l)$ fast überall bezüglich ν und wir definieren dort punktweise $f(l) := \lim_n s_n^n(l)$. Per Definition ist f messbar und der Limes von s_n^n. Wir erkennen, dass punktweise

$$f(l) = \lim_{k\to\infty} s_k^k(l) = s_n^n(l) + \sum_{k=n}^{\infty} \left(s_{k+1}^{k+1}(l) - s_k^k(l)\right) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Also folgt die Vollständigkeit des Bochnerraums aus

$$\begin{aligned}\int \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\nu(l) \leq \int \|f_n - s_n^n\| \,\mathrm{d}\nu &+ \int \|s_n^n - f\| \,\mathrm{d}\nu \\ = |||f_n - s_n^n||| &+ \int \left\|\sum_{k=n}^{\infty} s_{k+1}^{k+1} - s_k^k\right\| \mathrm{d}\nu \\ \leq |||f_n - s_n^n||| + \sum_{k=n}^{\infty} \left|\left|\left|s_{k+1}^{k+1} - s_k^k\right|\right|\right| & \\ \leq 2^{-n-1} + 2^{-n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0. &\end{aligned}$$

///

2.3.5 Proposition
Ist X ein Banachverband, so ergibt sich durch punktweise Definition eine Banachverbandsstruktur auf $\mathrm{L}^1(L,\nu;X)$. Ist X sogar ein AL-Raum, so ist $\mathrm{L}^1(L,\nu;X)$ ein AL-Raum.

Wie im Fall von reellwertigen Bochnerräumen, also Lebesgue-Räumen, erhalten wir, dass die stetigen Abbildungen dicht im Bochnerraum liegen. Durch dieses Ergebnis wird es uns möglich sein zu beweisen, dass ein Integralraum $\int \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ mit konstanten $\mu_l \equiv \eta$ einem Bochnerraum entspricht.

2.3.6 Satz
Unter den Voraussetzungen von Definition 2.3.1 sind die X-wertigen stetigen Abbildungen auf L Bochner-messbar und die Menge der Restklassen stetiger Abbildungen liegt dicht im Bochnerraum $\mathrm{L}^1(L,\nu;X)$.

Beweis
Ist $f \in \mathcal{C}(L;X)$, $\varepsilon > 0$ und $l_0 \in L$, so existiert eine offene Umgebung $U_{l_0,\varepsilon} \subseteq L$ von l_0 mit $\|f(l) - f(l_0)\| < \varepsilon$ für alle $l \in U_{l_0,\varepsilon}$. Da L kompakt ist, können wir endlich viele $l_1,\ldots,l_n$ wählen so, dass

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{l_i} = L.$$

Somit gilt für $V_{l_i} := U_{l_i} \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} U_{l_k}$ und $f_\varepsilon := \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\cdot \chi_{V_{l_i}}(l)$, dass

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon - f\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} &= \int_L \|f_\varepsilon(l) - f(l)\|\,\mathrm{d}\nu(l) = \sum_{i=1}^{n}\int_{V_{l_i}} \|f_\varepsilon - f\|\,\mathrm{d}\nu \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{V_{l_i}} \|f_\varepsilon(l_i) - f\|\,\mathrm{d}\nu \leq \sum_{i=1}^{n}\int_{V_{l_i}} \varepsilon\,\mathrm{d}\nu = \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit folgt, dass eine Teilfolge der einfachen Abbildungen $f_n := f_{2^{-n}}$ punktweise gegen f konvergieren und $\|f_n - f_k\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} \leq 2^{-\min\{n,k\}} \to 0$. Per Definition ist damit f messbar und es gilt $\|f\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} \leq \|f_1\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} + 1 < \infty$, also $f \in \mathrm{L}^1(L,\nu;X)$.

Sei $U \subseteq L$ eine Borel Mengen und $x \in X$. Da $\mathcal{C}(L)$ dicht in $\mathrm{L}^1(L,\nu;\mathbb{R})$ liegt, existieren $(g_n)_n \subseteq \mathcal{C}(L;\mathbb{R})$, sodass $g_n \to \chi_U$ in $\mathrm{L}^1(L,\nu;\mathbb{R})$. Es folgt für $f_n := g_n \cdot x$, dass

$$\begin{aligned}\|f_n - \chi_U\cdot x\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;X)} &= \int_L \|g_n\cdot x - \chi_U\cdot x\|\,\mathrm{d}\nu = \int |g_n - \chi_U|\,\mathrm{d}\nu\cdot\|x\| \\ &\leq \|g_n - \chi_U\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu;\mathbb{R})}\cdot\|x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Da einfache Abbildungen Linearkombinationen solcher Abbildungen $\chi_U \cdot x$ sind, werden alle einfachen Abbildungen approximiert. Per Definition liegen damit die stetigen Abbildungen dicht im Bochnerraum. ///

2.3.7 Satz (Vergleich von Bochner- und Integralräumen)
Ist $\int_L \mathrm{L}^1(K,\eta)\,\mathrm{d}\nu(l)$ ein Integralraum, so gilt im Sinn von Satz 2.1.3

$$\int_L \mathrm{L}^1(K,\eta)\,\mathrm{d}\nu(l) = \mathrm{L}^1\Big(L,\nu,\mathrm{L}^1(K,\eta)\Big).$$

Beweis
Da $\mathcal{C}(K)$ dicht in $\mathrm{L}^1(K,\eta)$ liegt, ist $\mathcal{C}(L,\mathcal{C}(K))$ nach Satz 2.3.6 eine dichte Teilmenge des Bochnerraums $\mathrm{L}^1(L,\nu,\mathrm{L}^1(K,\eta))$ bezüglich der Bochnernorm. Per Definition des Integralraums liegt aber $\mathcal{C}(L,\mathcal{C}(K))$ auch dicht im Integralraum bezüglich dessen Norm. Die Aussage des Satzes folgt, da für $f \in \mathcal{C}(L,\mathcal{C}(K))$ die Norm des Integralraums und des Bochnerraums gleich sind, das heißt, da für $f \in \mathcal{C}(L,\mathcal{C}(K))$

$$\|f\|_{\mathrm{L}^1\left(L,\nu,\mathrm{L}^1(K,\eta)\right)} = \int_L \|f(l)\|_{\mathrm{L}^1(K,\eta)}\,\mathrm{d}\nu(l) = |||f|||$$

gilt. ///

Unter gewissen Vorraussetzungen folgt bei einem Bochnerraum-wertigem Diagonaloperator die Surjektivität des gesamten Operators aus der Surjektivität der punktweisen Operatoren – im Gegensatz zum allgemeinen Fall. In [Sch11, Kap. 3] kann eine Anwendung dieses Satzes gefunden werden.

2.3.8 Satz
Seien $X = \int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ ein Integralraum und $Y = \mathrm{L}^1(L,\nu,\mathrm{L}^1(\widetilde{K},\eta))$ ein Bochnerraum und $T = \int T_l\,\mathrm{d}\nu(l)$ ein Diagonaloperator so, dass T_l für alle $l \in L$ surjektiv ist. Ist $l \mapsto T_l$ *stark stetig*, das heißt, ist für alle $f \in \mathcal{C}(K)$ die Abbildung $L \to \mathrm{L}^1(K,\eta)$: $l \mapsto T_l f$ stetig, so hat T dichtes Bild.

Beweis
Wir konstruieren für $f \in \mathcal{C}(L,\mathcal{C}(K))$ und $\varepsilon > 0$ ein $g \in X$ mit $|||Tg - f||| < 3\varepsilon$. Nach Voraussetzung existiert für $l \in L$ ein $g_{l_0} \in \mathcal{C}(\widetilde{K})$ mit

$$\varepsilon > \|T_{l_0} g_{l_0} - f(l_0)\|_{\mathrm{L}^1\left(\widetilde{K},\eta\right)}.$$

Mit der Stetigkeit von f und der starken Stetigkeit von $l \mapsto T_l$ wählen wir für $l_0 \in L$ eine Umgebung $U_{l_0} \subseteq L$ von l_0 mit

$$\varepsilon > \max\Big(\|f(l_0) - f(l)\|_{\mathcal{C}(K)},\ \|T_{l_0} g_{l_0} - T_l g_{l_0}\|_{\mathrm{L}^1\left(\widetilde{K},\eta\right)}\Big) \qquad \forall\, l \in U_{l_0}.$$

Da $L = \bigcup_l U_l$ kompakt ist, gibt es $l_1,\dots,l_n \in L$ mit $L = \bigcup_k U_{l_k}$. Betrachten wir

$$A_k := U_k \setminus \bigcup_{m=1}^{k-1} U_m,$$

so sind diese Mengen messbar, paarweise disjunkt und überdecken L. Wir definieren nun

$$g := \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} \cdot g_{l_k} \in \int_L \mathrm{L}^1 (K, \mu_l) \,\mathrm{d}\nu (l)$$

und erkennen für $l \in A_k$

$$\begin{aligned}
\|Tg(l) - f(l)\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} &= \|T_l(g(l)) - f(l)\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} = \|T_l g_{l_k} - f(l)\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \\
&\leq \|T_l g_{l_k} - T_{l_k} g_{l_k}\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} + \|T_{l_k} g_{l_k} - f(l_k)\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \\
&\quad + \|f(l_k) - f(l)\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \\
&< 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$|||Tg - f||| = \int \|Tg(l) - f(l)\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \,\mathrm{d}\nu(l) \leq \int 3\varepsilon \,\mathrm{d}\nu(l) = 3\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ und $f \in \mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K))$ beliebig waren, haben wir damit die Aussage bewiesen.///

2.3.9 Korollar
Sei $T = \int T_l \,\mathrm{d}\nu(l)$ ein Diagonaloperator von einem Integralraum $X = \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l) \,\mathrm{d}\nu(l)$ in einen Bochnerraum $Y = \mathrm{L}^1(L, \nu, \mathrm{L}^1(\widetilde{K}, \eta))$ so, dass T_l für alle $l \in L$ bijektiv und isometrisch ist. Ist $l \mapsto T_l$ stark stetig, so ist T isometrisch und bijektiv.

Um zu zeigen, dass T bijektiv ist, könnte man anstelle der Isometrie der T_l auch nur fordern, dass $\sup \|T_l^{-1}\| < \infty$ ist, da auch in diesem Fall aus der Dichtheit des Bildes von T die Surjektivität von T folgt.

2.4 Direkte Integrale

In diesem Teil der Arbeit wird das von J. von Neumann in [Neu49, Kap. 3] eingeführte *direkte Integral von Hilberträumen* betrachtet und grundlegende Resultate dazu bewiesen. Wir folgen dabei der Einführung in die Thematik aus [Tak79, Kap. 4, Abschnitt 8]. Im nachfolgenden Abschnitt 2.5 werden wir dann die direkten Integrale mit den in dieser Arbeit eingeführten Integralräumen zu vergleichen.

Ein Element f eines direkten Integrals über einem gegebenen Maßraum (L, ν) einer Familie $\{\mathfrak{H}_l\}_{l \in L}$ von Hilberträumen, ist eine Abbildung auf L so, dass für alle $l \in L$ bereits $f(l) \in \mathfrak{H}_l$ gilt. Um dies zu formalisieren, interpretieren wir solche Abbildungen als Elemente des Produktes $\prod_{l \in L} \mathfrak{H}_l$ und schreiben f_l für $f(l)$, bis wir in Abschnitt 2.5 wieder zur Interpretation als Abbildungen zurückkehren.

Nun müssen wir definieren, wann ein solches Produktraumelement *messbar* heißt. Dies führen wir axiomatisch durch, in dem wir bemerken, dass der Betrag, die Summe und das Produkt bei „gewöhnlichen“ messbaren Abbildungen messbar bleibt. Dies führt zur folgenden Definition der Messbarkeit.

2.4.1 Definition (Messbares Feld von Hilberträumen)
Sei (L, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathfrak{H}_l\}_{l\in L}$ eine Familie von Hilbert-Räumen. Eine Menge $\mathfrak{M} \subseteq \prod_l \mathfrak{H}_l$ heißt *messbares Feld von Hilberträumen*, falls

1. für $x \in \mathfrak{M}$ die Abbildung $L \to \mathbb{R} : l \mapsto \|x_l\|_{\mathfrak{H}_l}$ messbar ist,
2. für $y \in \prod_l \mathfrak{H}_l$ bereits $y \in \mathfrak{M}$ folgt, falls für alle $x \in \mathfrak{M}$ die Abbildung $L \to \mathbb{R} : l \mapsto (x_l,\, y_l)_{\mathfrak{H}_l}$ messbar ist,
3. eine abzählbare Menge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$ existiert so, dass für alle $l \in L$ die Menge $\{f_l \,|\, f \in \mathfrak{A}\}$ dicht in $\mathfrak{H}_l$ liegt.

Dabei heißt $\mathfrak{A}$ ein *Fundamentalsystem von messbare Vektoren.*

2.4.2 Bemerkung
Für jedes $x \in \mathfrak{M}$ und jede messbare Abbildung $f : L \to \mathbb{R}$ gilt

$$f \cdot x := (f(l) \cdot x_l)_{l\in L} \in \mathfrak{M},$$

da für $y \in \mathfrak{M}$

$$L \to \mathbb{R} : l \mapsto (f(l) \cdot x_l,\, y_l)_{\mathfrak{H}_l} = f(l) \cdot (x_l,\, y_l)_{\mathfrak{H}_l}$$

als Produkt messbarer Abbildungen selbst messbar ist und daher mit dem zweiten Axiom $f \cdot x \in \mathfrak{M}$ folgt. Ebenso folgt für $x, y \in \mathfrak{M}$ bereits $x + y \in \mathfrak{M}$. Insbesondere ist $\mathfrak{M}$ ein Vektorraum.

Bisher ist es nicht möglich zu sagen, ob $x \in \prod_l \mathfrak{H}_l$ messbar ist oder nicht, ohne bereits alle messbaren Elemente $\mathfrak{M}$ zu kennen. Als ersten Schritt stellen wir nun fest, dass es genügt, ein Fundamentalsystem in $\mathfrak{M}$ zu kennen.

2.4.3 Proposition
Sei (L, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\{\mathfrak{H}_l\}_{l\in L}$ eine Familie von Hilberträumen und $\mathfrak{A} \subseteq \prod_l \mathfrak{H}_l$ abzählbar mit

1. für $x, y \in \mathfrak{A}$ ist die Abbildung $L \to \mathbb{R} : l \mapsto (x_l,\, y_l)_{\mathfrak{H}_l}$ messbar,
2. für $l \in L$ liegt $\mathrm{lin}\{x_l \,|\, x \in \mathfrak{A}\}$ dicht in $\mathfrak{H}_l$.

Dann ist

$$\mathfrak{M} := \left\{ x \in \prod_{l \in L} \mathfrak{H}_l \;\middle|\; \text{die Funktion } L \to \mathbb{R} : l \mapsto (x_l, y_l)_{\mathfrak{H}_l} \text{ ist für alle } y \in \mathfrak{A} \text{ messbar} \right\}$$

ein messbares Feld von Hilberträumen.

Beweis
Offensichtlich ist $\mathfrak{M}$ ein Untervektorraum von $\prod_l \mathfrak{H}_l$ mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$. Also sind per Definition die Bedingungen 2 und 3 erfüllt. Des Weiteren ist $\widehat{\mathfrak{A}} := \operatorname{lin}_{\mathbb{Q}} \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{M}$ abzählbar und liegt punktweise dicht, das heißt für alle $l \in L$ liegt $\widehat{\mathfrak{A}}_l := \{x_l \mid x \in \widehat{\mathfrak{A}}_l\}$ dicht in $\mathfrak{H}_l$ für alle $l \in L$. Insbesondere gilt für $x \in \mathfrak{M}$ und $l \in L$

$$\|x_l\|_{\mathfrak{H}_l} = \sup \left\{ \frac{(x_l, y_l)_{\mathfrak{H}_l}}{(y_l, y_l)_{\mathfrak{H}_l}} \;\middle|\; y_l \in \widehat{\mathfrak{A}} \right\},$$

falls wir $\frac{0}{0} = 0$ setzen. Dies ist jedoch als Supremum von abzählbar vielen messbaren Funktionen messbar. Also ist auch Axiom 1. erfüllt und die Behauptung folgt. ///

Wie der folgende Satz aus [Tak79, Kap. 4, Abschnitt 8] zeigt, können wir ein messbares Feld in dem Sinne trivialisieren, dass für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ die Menge

$$M_n := \{l \in L \mid \dim \mathfrak{H}_l = n\}$$

messbar ist. Dies bedeutet, dass $\mathfrak{H}_l \cong \mathbb{R}^n$ für $l \in M_n$ mit $n \neq \infty$ und $\mathfrak{H}_l \cong \ell^2$ für $l \in M_\infty$.

2.4.4 Satz (Trivialisierung)
Ist $\mathfrak{M} \subseteq \prod_l \mathfrak{H}_l$ ein messbares Feld, dann ist

$$L \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} : l \mapsto \dim \mathfrak{H}_l$$

messbar und es existiert $\{x^n\}_n \subseteq \mathfrak{M}$ so, dass für $l \in L$ durch $\{x_l^k\}_{k=1}^{\dim \mathfrak{H}_l}$ eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{H}_l$ gegeben ist und $x_l^k = 0$ für $k > \dim \mathfrak{H}_l$.

Beweis
Sei $\{z^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{M}$ ein Fundamentalsystem von messbare Vektoren. Wir zeigen nun die zweite Aussage per Induktion. Dafür sei für $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ angenommen, dass

1. $\{x^k\}_{k=1}^n \subseteq \mathfrak{M}$,
2. $\{x_l^k\}_{k=1}^n \subseteq \mathfrak{H}_l$ für $l \in L$ mit $\dim \mathfrak{H}_l \geq n$ ein Orthonormalsystem ist,
3. $\{x_l^k\}_{k=1}^{\dim \mathfrak{H}_l} \subseteq \mathfrak{H}_l$ für $l \in L$ mit $\dim \mathfrak{H}_l \leq n$ eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{H}_l$ ist,

4. $x_l^k = 0$ für $l \in L$ und $k \leq n$ mit $k > \dim \mathfrak{H}_l$.

Für $l \in L$ bezeichne π_l^n die orthogonale Projektion von $\mathfrak{H}_l$ auf $\operatorname{lin}\{x_l^k\}_{k=1}^n$, wobei wir $\operatorname{lin} \emptyset = \{0\}$ setzen. Also gilt für $y \in \mathfrak{M}$

$$\pi^n y := (\pi_l^n y_l)_{l \in L} = \left(\sum_{k=1}^n \left(y_l, x_l^k\right)_{\mathfrak{H}_l} \cdot x_l^k \right)_{l \in L} \in \mathfrak{M}.$$

Insbesondere ist $\pi^n y - y \in \mathfrak{M}$. Des Weiteren erkennen wir für

$$U_k := \left\{ l \in L \;\middle|\; \pi_l^n z_l^k \neq z_l^k,\ \forall\, 1 \leq j < k :\ \pi_l^n z_l^j = z_l^j \right\}$$

dass dies messbare, paarweise disjunkte Mengen sind, da $l \mapsto \|(z^k - \pi^n(z^k))_l\|_{\mathfrak{H}_l}$ nach Voraussetzung messbar ist. Wir definieren

$$x_l^{n+1} := \begin{cases} \frac{z_l^j - \pi_l^j(z_l^j)}{\|z_l^j - \pi_l^j(z_l^j)\|_{\mathfrak{H}_l}} & : l \in U_j \\ 0 & : l \notin \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j \end{cases}$$

und erkennen, dass $x^{k+1} \in \mathfrak{M}$, da die Messbarkeit nach Voraussetzung erfüllt sind. Des Weiteren erfüllt $\{z^k\}_{k=1}^{n+1}$ die Induktionsvoraussetzungen für $n+1$. Da der Fall $n = 0$ trivialerweise erfüllt ist, folgt die Existenz der x^k wie gewünscht.

Offensichtlich gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\{l \in L \mid \dim \mathfrak{H}_l = n\} = L \setminus \bigcup_{k=1}^n \left(l \mapsto \left\| x_l^k \right\|_{\mathfrak{H}_l} \right)^{-1}(0) = L \setminus \left(l \mapsto \|x_l^n\|_{\mathfrak{H}_l} \right)^{-1}(0)$$

und

$$\{l \in L \mid \dim \mathfrak{H}_l = \infty\} = L \setminus \bigcup_{k=1}^\infty \left(l \mapsto \left\| x_l^k \right\|_{\mathfrak{H}_l} \right)^{-1}(0)$$

also sind diese Mengen messbar und damit gilt auch die erste Behauptung. ///

Wir werden im folgenden Theorem zeigen, dass, abgesehen von einer gewissen Isomorphie, der Begriff der Messbarkeit unabhängig von der Wahl eines Fundamentalsystems ist. Um dieses Resultat zu erhalten, verwenden wir die Effros-Borel-σ-Algebra auf den abgeschlossenen Unterräumen $\mathfrak{W}(\ell^2)$ des Hilbertraums ℓ^2 als technisches Hilfsmittel. Die Definition und grundlegende Resultate dieser Struktur geben wir in Abschnitt A.1 im Appendix.

2.4.5 Theorem
Sei (L, ν) ein Standard-Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathfrak{H}_l\}_{l \in L}$ eine Familie von separablen Hilberträumen. Ein linearer Unterraum $\mathfrak{M}$ von $\prod_l \mathfrak{H}_l$ ist genau dann ein messbares

Feld, falls für jedes $l \in L$ eine Isometrie $U_l : \mathfrak{H}_l \to \ell^2$ existiert so, dass $l \mapsto U_l\mathfrak{H}_l$ messbar bezüglich der Effros-Borel Struktur von $\mathfrak{W}(\ell^2)$ ist und in diesem Fall gilt

$$\mathfrak{M} = \left\{ x \in \prod_{l \in L} \mathfrak{H}_l \;\middle|\; L \to \ell^2 : l \mapsto U_l\,(x_l) \;\text{ messbar} \right\}.$$

Beweis

Ist $\mathfrak{M}$ ein messbares Feld, so wählen wir mit Satz 2.4.4 eine Folge $(x^n)_n \subseteq \mathfrak{M}$ so, dass für alle $l \in L$ durch $\{x_l^n\}_{n=1}^{\dim \mathfrak{H}_l}$ eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{H}_l$ gegeben ist und für $n > \dim \mathfrak{H}_l$ bereits $x_l^n = 0$ gilt. Wir definieren

$$U_l : \mathfrak{H}_l \to \ell^2 : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (x_l^n,\, x)_{\mathfrak{H}_l} e_n \qquad \forall\, l \in L,$$

wobei $e_n = (\delta_n^k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. Damit ist U_l eine Isometrie und mit der Betrachtung von $\{q \cdot x^n\}_{q \in \mathbb{Q},\, n \in \mathbb{N}} =: \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in Korollar A.1.4 ergibt sich die geforderte Messbarkeit. Offensichtlich gilt die behauptete Messbarkeits-Charakterisierung.

Ist andererseits für jedes $l \in L$ eine Isometrie $U_l : \mathfrak{H}_l \to \ell^2$ gegeben, die die geforderte Messbarkeit erfüllt, so wählen wir mit Korollar A.1.4 eine abzählbare Menge $\{f_n : L \to \ell^2\}$ so, dass für alle $l \in L$ die Menge $\{f_n(l)\}_n$ dicht in $U_l\mathfrak{H}_l$ liegt. Insbesondere erfüllt

$$\left\{ (x_l)_l \in \prod_{l \in L} \mathfrak{H}_l \;\middle|\; \forall\, l \in L :\, U_l x_l = f_n\,(l) \right\}$$

die Voraussetzungen von Proposition 2.4.3 und es folgt die Behauptung. ///

2.4.6 Bemerkung

Insbesondere gilt, dass das messbare Feld bis auf punktweise, isometrische Hilbertraumisomorphie eindeutig durch die Familie $\{\mathfrak{H}_l\}_l$ definiert ist.

Nun haben wir eine gewisse Wohldefiniertheit, sprich Eindeutigkeit, „des“ messbaren Feldes von Hilberträumen erreicht und können das direkte Integral von Hilberträumen einführen.

2.4.7 Definition (Direktes Integral von Hilberträumen)

Sei (L, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{\mathfrak{H}_l\}_{l \in L}$ eine Familie von Hilberträumen, sowie $\mathfrak{M} \subseteq \prod_l \mathfrak{H}_l$ ein messbares Feld von Hilberträumen. Bezeichnet $\sim_\nu$ die Äquivalenzrelation der ν-fast überall Gleichheit, so heißt der Raum

$$\mathfrak{H} := \int^{\oplus} \mathfrak{H}_l \,\mathrm{d}\nu\,(l) := \left\{ f \in \mathfrak{M} \;\middle|\; |||f|||_2^2 := \int_L \|f_l\|_{\mathfrak{H}_l}^2 \,\mathrm{d}\nu\,(l) < \infty \right\} \Big/ \sim_\nu$$

das direkte Integral der Hilberträume $\mathfrak{H}_l$. Für $x, y \in \mathfrak{H}$ definiert

$$(x,\, y)_{\mathfrak{H}} := \int (x_l,\, y_l)_{\mathfrak{H}_l}\, \mathrm{d}\nu\,(l)$$

ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{H}$, das die Norm $|||\cdot|||_2$ auf $\mathfrak{H}$ induziert.

2.4.8 Satz
Unter den Voraussetzungen von Definition 2.4.7 ist das direkte Integral von Hilberträumen $\mathfrak{H}$ selbst ein Hilbertraum.

Beweis
Es verbleibt nur die Vollständigkeit zu zeigen. Sei also $(f^n)_n \subseteq \mathfrak{H}$ eine Cauchyfolge. Da es genügt die Konvergenz einer Teilfolge nachzuweisen, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ bereits $|||f^n - f^{n+1}|||_2 \leq 2^{-n}$ gilt und dass für ν-fast alle $l \in L$ durch $(f_l^n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathfrak{H}_l$ gegeben ist. Da dies vollständige Räume sind, existiert der Limes $f_l := \lim_n f_l^n \in \mathfrak{H}_l$ für ν-fast alle $l \in L$. Insbesondere gilt für $g \in \mathfrak{M}$, dass

$$L \to \mathbb{R} : l \mapsto (g,\, f_l)_{\mathfrak{H}_l} = \lim_{n\to\infty} (g,\, f_l^n)_{\mathfrak{H}_l}$$

als ν-fast überall Limes messbarer Funktionen messbar ist, also ist $f \in \mathfrak{M}$. Des Weiteren gilt

$$\int \|f_l^n - f_l\|_{\mathfrak{H}_l}^2\, \mathrm{d}\nu\,(l) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left|\left|\left| f^{n+1} - f^n \right|\right|\right|_2 \leq 2^{-n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Also konvergiert f^n gegen f bezüglich der Norm $|||\cdot|||_2$. Insbesondere gilt

$$|||f|||_2 \leq |||f^1|||_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left|\left|\left| f^{n+1} - f^n \right|\right|\right|_2 \leq |||f^1|||_2 + 1 < \infty,$$

also gilt auch $f \in \mathfrak{H}$. Somit ist $\mathfrak{H}$ vollständig und daher in Hilbertraum. ///

2.5 Integralräume und Direkte Integrale im Vergleich

Offensichtlich unterscheiden sich Integralräume und direkte Integrale von Hilberträumen, da ersterer ein AL-Raum und letzterer ein Hilbertraum ist. Um einen Vergleich dieser Räume zu ermöglichen, wird zunächst der Begriff des Integralraums in natürlicher Weise auf Hilberträume übertragen.

2.5.1 Definition (Integral-Hilbertraum)
Unter den Bedingungen wie in Definition 2.1.1 heißt

$$\int_L \mathrm{L}^2(K,\mu_l)^2 \,\mathrm{d}\nu(l) := \left\{ f \in \int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l) \;\middle|\; |||f|||_2 < \infty \right\}$$

der *Integral-Hilbertraum von K über $\mu_{(\cdot)}$ bezüglich ν*, wobei

$$|||f|||_2^2 := \int_L \|f(l)\|^2_{\mathrm{L}^2(K,\mu_l)} \,\mathrm{d}\nu(l)\,.$$

Dies ist nach Satz 2.1.3 wohldefiniert. Für $f, g \in \int_L \mathrm{L}^2(K,\mu_l)^2\,\mathrm{d}\nu(l)$ ist durch

$$(f,\, g)_{\mathcal{H}} := \int_K (f(l),\, g(l))_{\mathrm{L}^2(K,\mu_l)} \,\mathrm{d}\nu(l)$$

ein Skalarprodukt gegeben, das die obige Norm erzeugt. Damit wird dies tatsächlich ein Hilbertraum.

Das direkte Integral von Hilberträumen ist nur definiert, wenn die einzelnen „Hilberträume“ $\mathfrak{H}_l$ separabel sind. Um also einen Vergleich der Integral-Hilberträume mit dem direkten Integral durchführen zu können, bemerken wir als ersten Schritt, dass Integral-Hilberträume unter gewissen Voraussetzungen auch diese „punktweise Separabilität“ erfüllen.

2.5.2 Lemma (Punktweise Separabilität)
Ist $\widetilde{\mathcal{A}}$ dicht in $\mathcal{C}(K)$, so ist für $\mathcal{A} := \{f \cdot \mathbb{1}_L \mid f \in \widetilde{\mathcal{A}}\}$ und $l \in L$ die Menge $\mathcal{A}_l = \{f(l) \mid f \in \mathcal{A}\}$ dicht in $\mathrm{L}^2(K,\mu_l)$.

Falls $\mathcal{C}(K)$ separabel ist, existiert also eine abzählbare Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K))$ so, dass für alle $l \in L$ die Menge $\{f(l) \mid f \in \mathcal{B}\}$ dicht in $\mathrm{L}^2(K,\mu_l)$ liegt.

Nun haben wir das nötige Werkzeug zur Hand, um den angekündigten Vergleich zu führen: Interpretieren wir den Integral-Hilbertraum nach Satz 2.1.3 als Vektorraum von Restklassen von ν-fast überall übereinstimmenden Abbildung auf L und wählen $\mathrm{L}^2(K,\mu_l)$ als die punktweisen Hilberträume, so erkennen wir zunächst

$$\int^{\oplus} \mathrm{L}^2(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)\,,\ \int \mathrm{L}^2(K,\mu_l)^2\,\mathrm{d}\nu(l) \subseteq \prod_{l\in L} \mathrm{L}^2(K,\mu_l) \Big/ \sim_\nu,$$

wobei $\sim_\nu$ wieder die Äquivalenzrelation der ν-fast überall Gleichheit bezeichne. Damit sind beide Räume Unterräume des selben Vektorraums und wir erkenne, dass die Normen beider Räume auf gemeinsamen Elementen gleich sind. Daher stellt sich nun die Frage, ob bzw. welche Inklusion zwischen diesen beiden Teilräumen gilt. Unter gewissen Voraussetzungen wird sich aus Proposition 2.4.3 und Lemma 2.5.2 ergeben, dass in obigem Sinn der Integralraum ein abgeschlossener Unterraum des direkten Integrals ist. Überraschender Weise ist auch die umgekehrte Inklusion wahr.

2.5.3 Theorem (Integral-Hilberträume sind Direkte Integrale)
Ist $\mathcal{C}(K)$ separabel und $X = \int \mathrm{L}^2(K, \mu_l)^2 \,\mathrm{d}\nu(l)$ ein Integral-Hilbertraum, so ist X im Sinn von Satz 2.1.3 ein direktes Integral von Hilberträumen, also gilt

$$X = \int^{\oplus} \mathrm{L}^2\left(K, \mu_l\right) \mathrm{d}\nu\left(l\right).$$

Beweis
Nach Lemma 2.5.2 existiert eine abzählbare Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K))$ so, dass $\mathcal{A}_l := \{f(l) \,|\, f \in \mathcal{A}\}$ dicht in $\mathcal{H}_l := \mathrm{L}^2(K, \mu_l)$ liegt. Außerdem ist nach Voraussetzung für $f, g \in \mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K))$ die Abbildung $L \to \mathbb{R} : l \mapsto \mu_l(f(l) \cdot g(l))$ messbar. Nach Proposition 2.4.3 ist damit

$$\mathfrak{M} := \left\{ m \in \prod_{l \in L} \mathrm{L}^2\left(K, \mu_l\right) \;\middle|\; \forall\, f \in \mathcal{A} :\; L \to \mathbb{R} : l \mapsto \mu_l\left(m \cdot f\right) \text{ messbar} \right\}$$

eine messbares Feld. Insbesondere gilt $\mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K)) \subseteq \mathfrak{M}$. Nach Satz 2.4.8 ist durch

$$\mathfrak{H} := \left\{ m \in \mathfrak{M} \;\middle|\; \int_L \|m_l\|_{\mathrm{L}^2(K,\mu_l)} \,\mathrm{d}\nu\left(l\right) < \infty \right\} \Big/ \left\{ m \in \mathfrak{M} \;\middle|\; \int \|m_l\|_{\mathrm{L}^2(K,\mu_l)} \,\mathrm{d}\nu\left(l\right) = 0 \right\},$$

ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\left(f,\, g\right)_{\mathfrak{H}} = \int_L \left(f\left(l\right),\, g\left(l\right)\right)_{\mathrm{L}^2(K,\mu_l)} \mathrm{d}\nu\left(l\right) = \int_L \int_K f\left(l\right) \cdot g\left(l\right) \mathrm{d}\mu_l \,\mathrm{d}\nu\left(l\right)$$

gegeben. Per Definition gilt damit

$$\mathcal{H} := \int_L \mathrm{L}^2\left(K, \mu_l\right)^2 \mathrm{d}\mu\left(l\right) \subseteq \mathfrak{H} = \int^{\oplus} \mathrm{L}^2\left(K, \mu_l\right) \mathrm{d}\nu\left(l\right),$$

wobei wir nach Satz 2.1.3 Elemente von $\mathcal{H}$ als ν-fast überall definierte Abbildung interpretieren. Außerdem ist $\mathcal{H}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathfrak{H}$, da per Definition

$$\left(f,\, g\right)_{\mathcal{H}} = \left(f,\, g\right)_{\mathfrak{H}} =: \left(f,\, g\right) \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{H} \subseteq \mathfrak{H}.$$

Ist $f \in \mathfrak{H}$ orthogonal zu $\mathcal{H}$, so gilt für $g \in \mathcal{C}(K)$ und $h \in \mathcal{C}(L)$ bereits $h \cdot g \in \mathcal{C}(L, \mathcal{C}(K)) \subseteq \mathcal{H}$, also

$$0 = \left(f,\, h \cdot g\right)_{\mathfrak{H}} = \int_L \int_K f\left(l\right) \cdot h\left(l\right) \cdot g \,\mathrm{d}\mu_l \,\mathrm{d}\nu\left(l\right) = \int_L h\left(l\right) \cdot \int_K f\left(l\right) \cdot g \,\mathrm{d}\mu_l \,\mathrm{d}\nu\left(l\right).$$

Da h beliebig war, folgt $\int_K f(l) \cdot g \,\mathrm{d}\mu_l = 0$ für ν-fast alle $l \in L$. Wählen wir $\{g_n\}_n$ als eine abzählbare dichte Teilmenge von $\mathcal{C}(K)$, so folgt für alle $l \in L$ außerhalb einer ν-Nullmenge

$$\int_K f\left(l\right) \cdot g_n \,\mathrm{d}\mu_l = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Mit der Dichtheit folgt dies für alle $g \in \mathcal{C}(K)$. Wie oben folgt $f(l) = 0$ fast überall bezüglich μ_l für alle $l \in L$ außerhalb einer ν-Nullmenge. Insgesamt folgt also $\|f\|_{\mathfrak{H}} = 0$, also $\mathcal{H}^{\perp} = \{0\}$. Da $\mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathfrak{H}$ ist, gilt $\mathcal{H} = \mathfrak{H}$. ///

Kapitel 3

Integralräume und dynamische Systeme

Nachdem in Kapitel 2 Integralräume eingeführt wurden, werden diese nun auf die Situation aus Kapitel 1 angewendet, um den AL-Raums X entlang eines Faktors zu zerlegen und als Integralraum zu interpretieren. Dies wird in Abschnitt 3.1 präzisiert. In Abschnitt 3.2 wird dann eine Dynamik auf den AL-Räumen eingeführt und anschließend untersucht, wie sich diese auf den zugehörigen Integralraum überträgt. Wie in Abschnitt 3.3 gezeigt wird, implizieren unsere Ergebnisse die *ergodische Zerlegung* von dynamischen Systemen. Abschließend wird in Abschnitt 3.4 diese Zerlegung in die maßtheoretische Sprache übersetzt und zuletzt auf so genannte *mittelergodische Systeme* angewendet.

3.1 Darstellung als Integralraum

Im Folgenden seien wieder die Standardvoraussetzungen 1.2.7 angenommen, das heißt, X und Y sind wieder AL-Räume mit einem isometrischen, Markovschen Verbandsoperator $i : Y \to X$ und $\mathrm{L}^1(K, \mu)$ und $\mathrm{L}^1(L, \nu)$ sind bezüglich i und $P := i'$ verträglichen Modelle dieser Räume. Des Weiteren sei $\mu_{(\cdot)} : L \to \mathcal{P}^1(K)$ die Desintegrationsabbildung nach Definition 1.3.2.

Wie angekündigt soll als erstes X als Integralraum entlang $\mu_{(\cdot)}$ bezüglich ν interpretiert werden. Dafür müssen wir zunächst zeigen, dass dieser wohldefiniert ist. Anschließend wird in Theorem 3.1.2 gezeigt, dass die angekündigte Interpretation tatsächlich möglich ist.

3.1.1 Bemerkung
Die Desintegrationsabbildung $\mu_{(\cdot)} : L \to \mathcal{P}(K)$ ist nach Theorem 1.3.4 bezüglich der schwach-*-Topologie auf $\mathcal{C}(K)'$ stetig, das heißt für jedes $f \in \mathcal{C}(L; \mathcal{C}(K))$ ist die Funktion

$$\mu_l\,(f) := \Big(L \to \mathbb{R} : l \mapsto \mu_l\,(f\,(l))\Big)$$

stetig. Insbesondere ist sie also messbar. Somit ist der Integralraum $\int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ im Sinne von Definition 2.1.1 wohldefiniert.

3.1.2 Theorem (Isomorphie)
Unter den Standardvoraussetzungen 1.2.7 ist

$$\mathcal{C}(K) \to \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l) : f \mapsto f \cdot \mathbb{1}_L$$

eine Markovscher Verbandsoperator, der bezüglich der Normen $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu)}$ und $|||\cdot|||$ isometrisch ist. Seine stetige Fortsetzung auf ganz $\mathrm{L}^1(K,\mu)$ ergibt die kanonische Banachverbandsisomorphie

$$\mathrm{L}^1(K, \mu) \cong \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l). \tag{3.1.1}$$

Beweis
Wir können $\mathrm{L}^1(K,\mu)$ durch $f \mapsto f \cdot \mathbb{1}_L$ isometrisch in $\int \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\, \mathrm{d}\nu$ einbetten, da

$$|||f \cdot \mathbb{1}_L||| = \int_L \|f\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)}\, \mathrm{d}\nu(l) = \int_L \mu_l(|f|)\, \mathrm{d}\nu(l) = \|f\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu)} \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}(K)$$

gilt. Offensichtlich ist diese Einbettung ein Verbandsoperator und es bleibt die Surjektivität der stetigen Fortsetzung nachzuweisen. Da dieser Operator isometrisch ist, reicht es aufgrund der Dichtheit von $\mathcal{C}(L;\mathcal{C}(K))/\sim$ in $\int \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\, \mathrm{d}\nu$ zu zeigen, dass für $f \in \mathcal{C}(L;\mathcal{C}(K))$ ein $g \in \mathcal{C}(K)$ existiert so, dass für alle $l \in L$ bereits $\mu_l(|g - f(l)|) = 0$, also $f = g \cdot \mathbb{1}_L$.

Es sei $\pi : K \to L$ wie in Proposition 1.2.5. Wir definieren für $f \in \mathcal{C}(L;\mathcal{C}(K))$ nun

$$g : K \to \mathbb{R} : x \mapsto \Big(f(\pi(x))\Big)(x)$$

und erkennen die Stetigkeit von g durch die für $(x_n)_n \subseteq K$ gültige Implikationskette

$$\begin{aligned} x_n \to x \implies \pi(x_n) \to \pi(x) &\implies f(\pi(x_n)) \to f(\pi(x)) \text{ in } \mathcal{C}(K) \\ &\implies g(x_n) \to g(x). \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt für $l \in L$ und $x \in \pi^{-1}(l)$ bereits

$$(f(l))(x) = \Big(f(\pi(x))\Big)(x) = g(x)$$

und nach Proposition 1.3.6 auch $\mu_l(K \setminus \pi^{-1}(l)) = 0$. Also folgt

$$\mu_l(|f(l) - g|) = \int_{\pi^{-1}(l)} |f(l) - g|\, \mathrm{d}\mu_l = \int_{\pi^{-1}(l)} |f(l) - f(l)|\, \mathrm{d}\mu_l = 0 \qquad \forall\, l \in L.$$

Damit ist die Isomorphie gezeigt. ///

Nach der Darstellung von X als $\int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l)$ stellt sich die Frage, wie sich Y in $\int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l)$ einbettet.

3.1.3 Proposition
Unter den Standardvoraussetzungen 1.2.7 ist durch

$$\tilde{i} : \mathrm{L}^1(L,\nu) \to \int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l) : f \mapsto \mathbb{1}_K \cdot f$$

ein isometrischer Markovscher Verbandsoperator gegeben. Sein Bild ist der Unterraum

$$\left\{ f \in \int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l) \;\middle|\; \forall\, l \in L : \; \exists\, c_l \in \mathbb{R} : \; f(l) = c_l \mathbb{1}_K \text{ in } \mathrm{L}^1(K,\mu_l) \right\}$$

von $\int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ und es kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "\tilde{i}"'] & X \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\
& \displaystyle\int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l).
\end{tikzcd}$$

Beweis
Offensichtlich gilt für $0 \leq f \in \mathcal{C}(L)$

$$\left|\!\left|\!\left| \tilde{i} f \right|\!\right|\!\right| = \int_L \mu_l \left(f(l) \cdot \mathbb{1}_K \right) \mathrm{d}\nu(l) = \int_L f(l)\,\mathrm{d}\nu(l) = \|f\|_{\mathrm{L}^1(L,\nu)}\,.$$

Da $\tilde{i}$ ein Verbandsoperator ist, ist $\tilde{i}$ somit eine Isometrie. Die Surjektivität von $\tilde{i}$ auf obigen Unterraum ist offensichtlich. Für $0 \leq f \in \mathcal{C}(L)$ gilt $if \cong if \cdot \mathbb{1}_L$ im Sinne der Isomorphie von $\mathrm{L}^1(K,\mu)$ und $\int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ aus Theorem 3.1.2 und damit

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_l \left(|f - \mathbb{1}_L \cdot f(l)| \right) = \delta_l \Big(P \Big(i \left(|f - \mathbb{1}_L \cdot f(l)| \right) \Big) \Big) = \mu_l \Big(\big| i \left(f - \mathbb{1}_L \cdot f(l) \right) \big| \Big) \\
&= \mu_l \Big(\big| if - i \left(\mathbb{1}_L \cdot f(l) \right) \big| \Big) = \mu_l \left(\left| if \cdot \mathbb{1}_L(l) - \mathbb{1}_K \cdot f(l) \right| \right).
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\left|\!\left|\!\left| if - \tilde{i} f \right|\!\right|\!\right| = \int_L \mu_l \Big(\big| if \cdot \mathbb{1}_L(l) - \mathbb{1}_K \cdot f(l) \big| \Big)\,\mathrm{d}\nu(l) = 0.$$

Also ist $i \cong \tilde{i}$ im Sinne der Isomorphie aus Theorem 3.1.2. ///

3.2 Zerlegung von dynamischen Systemen

Wie angekündigt wird in diesem Abschnitt eine Dynamik auf den ursprünglichen AL-Räumen eingeführt und diese über die Isomorphie aus Abschnitt 3.1 auf Integralräume übertragen. Um die geeigneten Begriffe für die folgenden Resultate zu finden, führen wir Dynamiken nicht nur auf AL-Räumen ein, sondern etwas allgemeiner auf Banachverbänden, auch wenn wir dies im Nachfolgenden vor allem für AL-Räume verwenden werden.

3.2.1 Definition (Dynamisches System, Faktor, Isomorphie)
Wir nennen das Tripel (X, μ, T) *dynamisches System*, falls X ein separabler Banachverband mit schwacher Ordnungseinheit 1_X, $0 \leq \mu \in X'$ eine positive Linearform mit $\mu(1_X) = 1$ und $T : X \to X$ ein bezüglich μ Bi-Markovscher Verbandsoperator ist.

Ein dynamisches System (Y, ν, S) heißt *Faktor* des dynamischen Systems (X, μ, T), falls ein isometrischer, Markovscher Verbandsoperator $i \in \mathcal{L}(Y, X)$ existiert so, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] & X \arrow[r, "\mu"] & \mathbb{R} \\
Y \arrow[u, "i"] \arrow[r, "S"] & Y \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\nu"] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. In diesem Fall heißt i *Faktorabbildung*.

Ist (Y, ν, S) ein Faktor des dynamischen Systems (X, μ, T), dessen Faktorabbildung ein Isomorphismus ist, so heißen die dynamischen Systeme (Y, ν, S) und (X, μ, T) *isomorph*.

Wir bemerken, dass wir nicht voraussetzen, dass T isometrisch ist, sondern „nur“ verlangen, dass T eine gewisse Linearform erhält. Betrachten wir $X = \mathrm{L}^1(K, \mu)$, so erkennen wir, dass isometrisch für einen Markovoperator $T : X \to X$ bedeuten würde, dass T bi-Markovsch bezüglich der ausgezeichneten Linearform μ ist. Wir lassen in dieser Definition jedoch zu, dass T bezüglich *einer* Linearform – nicht notwendigerweise bezüglich μ – bi-Markovsch ist.

3.2.2 Bemerkung
Ein separabler AL-Raum X mit einem isometrischen, Markovschen Verbandsoperator $T : X \to X$ induziert auf natürliche Weise ein dynamisches System. Dafür sei

$$\mu_{\|\cdot\|_X}(x) := \|x_+\|_X - \|x_-\|_X \qquad \forall\, x \in X.$$

Offensichtlich ist $\mu_{\|\cdot\|_X} \in X'$ positiv und es gilt $T'\mu_{\|\cdot\|} = \mu_{\|\cdot\|}$. Somit ist $(X, \mu_{\|\cdot\|_X}, T)$ ein dynamisches System und wir schreiben in diesem Fall kurz (X, T) für $(X, \mu_{\|\cdot\|_X}, T)$.

3.2.3 Erweiterte Voraussetzungen

Um die dazugewonnene Struktur des dynamischen Systems zu beachten, erweitern wir die Standardvoraussetzungen 1.2.7. Es seien im Folgenden X und Y separable AL-Räume mit einem isometrischen, Markovschen Verbandsoperator $i : X \to Y$. Des Weiteren seien $T : X \to X$ und $S : Y \to Y$ isometrische, Markovsche Verbandsoperatoren so, dass (Y, S) ein Faktor des dynamischen Systems (X, T) ist, bei dem i die Faktorabbildung ist. Außerdem seien $\mathrm{L}^1(K, \mu)$ und $\mathrm{L}^1(L, \nu)$ Modelle von X und Y, die verträglich mit T und S und bezüglich i und $P := i'$ sind. Das heißt, es gilt

$$\begin{array}{llcl} \mathrm{L}^1(K,\mu) \cong X, & \mathrm{L}^1(L,\nu) \cong Y, & & i(\mathcal{C}(L)) \subseteq \mathcal{C}(K), \\ P(\mathcal{C}(K)) \subseteq \mathcal{C}(L), & T(\mathcal{C}(K)) \subseteq \mathcal{C}(K) & \text{und} & S(\mathcal{C}(L)) \subseteq \mathcal{C}(L). \end{array}$$

Nach Theorem 1.2.2 bzw. Bemerkung 1.2.3 können immer solche Modelle gefunden werden. Des Weiteren bezeichne $\mu_{(\cdot)} : L \to \mathcal{C}(K)$ die Desintegrationsabbildung von X bezüglich Y. Mit Proposition 1.2.5 folgt für i bzw. T bzw. S die Existenz stetiger Abbildungen $\pi : K \to L$, $\psi : K \to K$ und $\varphi : L \to L$ mit $ig = g \circ \pi$, $Tf = f \circ \psi$ und $Sg = g \circ \varphi$ für alle $f \in \mathrm{L}^1(K, \mu)$ und $g \in \mathrm{L}^1(L, \nu)$.

Nach Voraussetzung kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(K) \arrow[r, "T"] & \mathcal{C}(K) \\ \mathcal{C}(L) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "S"] & \mathcal{C}(L). \arrow[u, "i"] \end{tikzcd}$$

und $P : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(L)$ ist nach Theorem 1.3.1 auf $\operatorname{Bild} i$ eingeschränkt die Inverse zu i. Daher stellt sich die Frage, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen auch das „umgekehrte Diagramm“, das heißt mit P an Stelle von i, kommutiert. Da P die Abbildung ist, mit der die Desintegrationsmaße definiert wurden, wird uns die Antwort auf diese Frage ermöglichen, in Theorem 3.2.5 zu charakterisieren, wie die Desintegrationsmaße μ_l unter T' abgebildet werden. Dies wird sich als der entscheidende Schritt zur Zerlegung der Dynamik im Integralraum herausstellen.

3.2.4 Proposition

Unter den erweiterten Voraussetzungen 3.2.3 kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(K) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "P"] & \mathcal{C}(K) \arrow[d, "P"] \\ \mathcal{C}(L) \arrow[r, shift left, "S"] & \mathcal{C}(L), \arrow[l, shift left, "S^{-1}"] \end{tikzcd}$$

falls S surjektiv ist.

Beweis
Sei $f \in \mathcal{C}(K)$ beliebig. Da $P(Tf)$, $S(Pf) \in \mathcal{C}(L)$ gilt, ist auch $P(Tf) - S(Pf) \in \mathcal{C}(L)$ und damit folgt, dass $U = \{l \in L \,|\, (P(Tf))(l) > (S(Pf))(l)\}$ eine offene Teilmenge von L ist. Für $0 \leq g \in \mathcal{C}(L)$ mit $\operatorname{supp} Sg \subseteq U$ gilt überall

$$\begin{aligned} P\left(T\left(f \cdot ig\right)\right) &= P\Big(Tf \cdot T\left(ig\right)\Big) = P\left(Tf \cdot i\left(Sg\right)\right) = P\left(Tf\right) \cdot Sg \\ &\geq S\left(Pf\right) \cdot Sg = S\left(Pf \cdot g\right) = S\left(P\left(f \cdot ig\right)\right). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \langle \mu \,|\, f \cdot ig \rangle &= \langle \mu \,|\, T\left(f \cdot ig\right) \rangle = \langle \nu \,|\, P\left(T\left(f \cdot ig\right)\right) \rangle \\ &\geq \langle \nu \,|\, S\left(P\left(f \cdot ig\right)\right) \rangle = \langle \nu \,|\, P\left(f \cdot ig\right) \rangle = \langle \mu \,|\, f \cdot ig \rangle. \end{aligned}$$

Da ν auf keiner nicht-leeren, offenen Teilmenge von L verschwindet, erhalten wir

$$P\left(Tf\right) \cdot Sg = P\left(Tf \cdot i\left(Sg\right)\right) = P\left(T\left(f \cdot ig\right)\right) = S\left(P\left(f \cdot ig\right)\right) = S\left(Pf\right) \cdot Sg,$$

also $P(Tf) = S(Pf)$ auf $\operatorname{supp} Sg$. Damit gilt $\operatorname{supp} g \cap U = \emptyset$ und somit per Annahme $g \equiv 0$. Mit dem Lemma von Urysohn und der Surjektivität von S folgt $U = \emptyset$. Analog folgt $\{l \in L \,|\, (P(Tf))(l) < (S(Pf))(l)\} = \emptyset$ und somit gilt die Aussage. ///

Im Folgenden bezeichne $\widetilde{T}$ den Operator, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"'] & X \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"'] \\ \int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l) \arrow[r, "\widetilde{T}"] & \int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

3.2.5 Theorem
Unter den erweiterten Voraussetzungen 3.2.3 gilt, falls S surjektiv ist,

$$T'\mu_l = \mu_{\varphi(l)} \qquad \forall\, l \in L. \tag{3.2.1}$$

Des Weiteren gilt für alle $f \in \mathcal{C}\left(L, \mathcal{C}\left(K\right)\right)$ und für ν-fast alle $l \in L$

$$\left(\widetilde{T} f\right)(l) = \Big(f\left(\varphi\left(l\right)\right)\Big) \circ \psi \quad \text{in } \mathrm{L}^1\left(K, \mu_l\right). \tag{3.2.2}$$

Beweis
Nach Proposition 3.2.4 gilt für $f \in \mathcal{C}(K)$

$$(\mu_l \circ T) f = \delta_l \left(P \left(Tf \right) \right) = \delta_l \left(S \left(Pf \right) \right) = \delta_l \left(\left(Pf \right) \circ \varphi \right) = \delta_{\varphi(l)} \left(Pf \right) = \mu_{\varphi(\cdot)} \left(f \right).$$

Wir erkennen daher für $l \in L$ und $f \in \mathcal{C}(K)$ mit $\|f\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_{\varphi(l)})} = \mu_{\varphi(l)}(|f|) = 0$, dass

$$\|Tf\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} = \mu_l \left(|Tf| \right) = \mu_l \left(T\,|f| \right) = T'\mu_l \left(|f| \right) = \mu_{\varphi(l)} \left(|f| \right) = 0.$$

Also ist T als Operator von Elementen aus $\mathrm{L}^1(K, \mu_{\varphi(l)})$ mit stetigem Restklassenvertreter nach $\mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ durch Auswahl eines beliebigen stetigen Restklassenvertreters wohldefiniert und eine Isometrie. Insbesondere kann dieser Operator zu einer Isometrie

$$T_l : \mathrm{L}^1 \left(K, \mu_{\varphi(l)} \right) \to \mathrm{L}^1 \left(K, \mu_l \right)$$

fortgesetzt werden und der Verbandsoperator

$$\widehat{T} : \int_L \mathrm{L}^1 \left(K, \mu_l \right) \mathrm{d}\nu \left(l \right) \to \int_L \mathrm{L}^1 \left(K, \mu_l \right) \mathrm{d}\nu \left(l \right) : f \mapsto \Big(l \mapsto T_l \left(f \left(\varphi \left(l \right) \right) \right) \Big)$$

ist nach Satz 2.1.3 wohldefiniert. Für $f \in \mathcal{C}(L; \mathcal{C}(K))$ existiert nach Theorem 3.1.2 eine Abbildung $g \in \mathcal{C}(K)$ mit $f = g \cdot \mathbb{1}_L$ in $\int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l)$ und es folgt

$$\left(\widehat{T} f \right) (l) = T_l \left(f \left(\varphi \left(l \right) \right) \right) = T_l g = Tg \qquad \forall\, l \in L$$

als $\mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ Gleichheit. Also kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & X \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\ \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l) \arrow[r, "\widehat{T}"] & \int_L \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l). \end{tikzcd}$$

Somit gilt $\widehat{T} = \widetilde{T}$ und damit ist die zweite Behauptung gezeigt. ///

3.3 Ergodische Zerlegung

Eine der wichtigsten Methoden, um eine gegebene Struktur zu verstehen, ist es sie in kleinstmögliche Bestandteile zu zerlegen, um dann nur noch diese untersuchen zu müssen. Wie angekündigt werden wir nun unseren bisherigen Ergebnisse verwenden, um dies an dynamischen Systemen durchzuführen. Das heißt, wir werden ein gegebenes dynamisches System in „kleinstmögliche Systeme“, so gennante *ergodische* Systeme, zerlegen.

In Theorem 3.2.5 haben wir ein gegebenes dynamisches System $(\mathrm{L}^1(K,\mu),T)$ als Integralraum $(\int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l),\widetilde{T})$ entlang eines *beliebigen* Faktors $(\mathrm{L}^1(L,\nu),S)$ von $(\mathrm{L}^1(K,\mu),T)$ dargestellt. Dies können wir als eine Zerlegung des Raumes in „kleinere Räume" $\mathrm{L}^1(K,\mu_l)$ auffassen. Allerdings ist dies keine Zerlegung des dynamischen Systems, da wir T nur als Operator von $\mathrm{L}^1(K,\mu_l)$ nach $\mathrm{L}^1(K,\mu_{\varphi(l)})$ interpretieren können, wie wir an Gleichung (3.2.1) bzw. (3.2.2) erkennen. Das heißt, die einzelnen „Bestandteile" $\mathrm{L}^1(K,\mu_l)$ bilden mit dem Operator T *kein* dynamisches System und damit haben wir auch *keine* Aufspaltung des *dynamischen* Systems in kleinere *dynamische* Systeme erhalten. Wir erkennen jedoch direkt, dass diese allgemeine Zerlegung auch eine Zerlegung des dynamischen Systems erlaubt, wenn wir fordern, dass $\varphi = \mathrm{id}_L$ gilt. Dies ist gleichwertig zu der Forderung, dass die Dynamik S trivial ist, also $S = \mathrm{id}$. Offensichtlich ist der größtmögliche Faktor, der dies erfüllt, gerade der Fixraum $\operatorname{Fix} T$ von T. In Korollar 3.3.3 werden wir die Zerlegung entlang dieses Faktors durchführen. Anschließend werden wir in Theorem 3.3.8 erkennen, dass die damit erhaltenen „Bestandteile" $(\mathrm{L}^1(K,\mu_l),T)$ *ergodisch* sind, das heißt tatsächlich nicht weiter zerlegt werden können.

3.3.1 Definition (Ergodizität)
Ein dynamisches System (X,μ,T) heißt *ergodisch*, falls

$$\mu\left(|x - \mu(x)\cdot 1_X|\right) = 0 \qquad \forall\, x \in \operatorname{Fix} T.$$

3.3.2 Bemerkung
Ist μ strikt positiv, wie zum Beispiel in Bemerkung 3.2.2, so ist das dynamische System (X,μ,T) genau dann ergodisch, falls $\operatorname{Fix} T = \langle \mathbb{1} \rangle$.

3.3.3 Korollar
Unter den erweiterten Voraussetzungen 3.2.3 ist für alle $l \in L$ durch $(\mathcal{C}(K),\mu_l,T)$ ein ergodisches, dynamisches System gegeben, das heißt

$$\mu_l(f) = \mu_l(Tf) \qquad \forall\, l \in L,\ f \in \mathcal{C}(K) \qquad \text{und} \tag{3.3.1}$$

$$0 = \mu_l\Big(|f - \mu_l(f)\cdot \mathbb{1}|\Big) \qquad \forall\, l \in L,\ f \in \mathcal{C}(K) \cap \operatorname{Fix} T. \tag{3.3.2}$$

Beweis
Da offensichtlich bereits $\varphi = \mathrm{id}_L$, folgt mit Gleichung (3.2.1) aus Theorem 3.2.5 bereits Gleichung (3.3.1). Es ist also nur noch Gleichung (3.3.2) zu zeigen. Dafür sei $f \in \operatorname{Fix} T \cap \mathcal{C}(K)$. Per Definition existiert damit eine Abbildung $g \in \mathcal{C}(L) \subseteq Y$ mit $ig = f$

und es gilt für jedes $l \in L$

$$\mu_l\left(\left|f - \mu_l(f) \cdot \mathbb{1}_K\right|\right) = \mu_l\left(\left|i\left(g - \mu_l(ig) \cdot \mathbb{1}_L\right)\right|\right) = \mu_l\left(i\left(\left|g - \delta_l(g) \cdot \mathbb{1}_L\right|\right)\right)$$
$$= \delta_l\left(\left|g - \delta_l(g) \cdot \mathbb{1}_L\right|\right) = \left|g(l) - g(l)\right| = 0. \qquad ///$$

3.3.4 Bemerkung
Nach Korollar 3.3.3 ist unter den erweiterten Voraussetzungen 3.2.3 für alle $l \in L$ durch $(\mathcal{C}(K), \mu_l, T)$ ein ergodisches dynamisches System gegeben. Es gilt des Weiteren

$$\mu_l\left([f \neq \mu_l(f)]\right) = 0 \qquad \forall\, f \in \operatorname{Fix} T \cap \mathcal{C}(K),\, l \in L.$$

Damit ist f auf $\operatorname{supp} \mu_l$ konstant bzw. es existiert ein $g \in \int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l)$ so, dass $f \sim g$ und für ν-fast alle $l \in L$ gilt $g(l) \equiv \mu_l(f)$ im Sinne einer $\mathrm{L}^1(K, \mu_l)$-Gleichheit.

In Korollar 3.3.3 stört, dass $(\mathcal{C}(K), \mu_l, T_l)$ und nicht $(\mathrm{L}^1(K, \mu_l), T_l)$ betrachtet werden. Damit wird die Ergodizität in den AL-Räume $\mathrm{L}^1(K, \mu_l)$, die den Raum $\mathrm{L}^1(K, \mu)$ in einen Integralraum $\int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\, \mathrm{d}\nu(l)$ zerlegen, nicht gezeigt. Um dies doch zu erhalten und damit dieses Resultat elegant umzuformulieren, fassen wir wie in [Haa11] die Projektion $P : \mathrm{L}^1(K, \mu) \to \mathrm{L}^1(L, \nu)$ als starken Limes von *Cesàro-Mitteln* des Operators T auf. Dafür verwenden wir den aus [Neu32b] bekannten *Mittelergoden Satz* bzw. dessen L^1-Version aus beispielsweise [EFHN09, Prop. 9.1].

3.3.5 Theorem (Mittelergoden Satz)
Ist $\mathrm{L}^1(M, \eta)$ ein metrisches Modell eines dynamischen Systems (Z, U) das verträglich mit U ist, so konvergiert für $f \in \mathrm{L}^1(M, \eta)$ die Folge $(A^N f)_N$ der Cesàro-Mittel, das heißt

$$A^N f := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U^k f,$$

in $\mathrm{L}^1(M, \eta)$ gegen ein Element in $\operatorname{Fix} T$.

Beweis
Konvergiert die Folge $(A^N f)_N$ für ein $f \in \mathrm{L}^1(M, \eta)$, so gilt

$$T\left(\lim_{N\to\infty} A^N f\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^{n+1} f = \lim_{N\to\infty} \left(A^N f + \frac{1}{N}\left(T^N f - f\right)\right),$$

also $\lim_N A^N f \in \operatorname{Fix} T$ und es verbleibt die Konvergenz zu zeigen.

Dafür zeigen wir zunächst, dass diese Konvergenz folgt, falls $(A^N f)_N$ für alle $f \in \mathcal{C}(M)$ einen schwachen Häufungspunkt in $\operatorname{Fix} U \subseteq \mathrm{L}^1(M,\eta) \subseteq \mathrm{L}^\infty(M,\eta)'$ hat. Es sei $Y \subseteq \mathrm{L}^1(M,\eta)$ die Menge aller $f \in \mathrm{L}^1(M,\eta)$ für die $A^N f$ konvergiert. Dieser Unterraum von $\mathrm{L}^1(M,\eta)$ ist abgeschlossen, da alle A^N Kontraktionen sind.

Wir zeigen nun, dass Y dicht in $\mathrm{L}^1(M,\eta)$ liegt, woraus die obige Implikation folgt. Zunächst ist klar, dass $Y \supseteq \operatorname{Fix} U$, da für $f \in \operatorname{Fix} U$ bereits $A^N f = f$ gilt. Des Weiteren gilt $Y \supseteq \operatorname{Bild}(I-U)$, da für $f = g - Ug \in \operatorname{Bild}(I-U)$ bereits

$$A^N f = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n (g - Ug) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} U^n g - U^{n+1} g = \frac{1}{N}\left(g - U^{N-1} g\right)$$

folgt und dies gegen 0 konvergiert, da U eine Isometrie ist. Da

$$Y = \overline{Y} \supseteq \overline{\operatorname{Fix} U \oplus \operatorname{Bild}(I-U)} \supseteq \operatorname{Fix} U \oplus \overline{\operatorname{Bild}(I-U)} =: Z$$

ist, genügt es zu zeigen, dass Z dicht in $\mathrm{L}^1(M,\eta)$ liegt. Nach dem Satz von Hahn-Banach müssen wir daher nur beweisen, dass für jedes Funktional $\varphi \in \mathrm{L}^1(K,\eta)'$ mit $\varphi|_Z = 0$ bereits $\varphi = 0$ folgt. Sei also $\varphi \in \mathrm{L}^1(K,\eta)'$ ein solches Funktional. Wir erkennen $U'\varphi = \varphi$, da

$$(U'\varphi - \varphi)(g) = \varphi(Ug) - \varphi(g) = \varphi((U - I)g) = 0 \qquad \forall g \in \mathrm{L}^1(K,\mu).$$

Für $f \in \mathcal{C}(M)$ und einen schwachen Häufungspunkt $g \in \operatorname{Fix} U$ von $(A^N f)_N$ gilt

$$\varphi(g) = \lim_{N\to\infty} \varphi\left(A^N\right) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (U'^n \varphi)(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \varphi(f) = \varphi(f).$$

Da nach Annahme $g \in \operatorname{Fix} U \subseteq \ker \varphi$ gilt, ist $\varphi(f) = \varphi(g) = 0$. Da $f \in \mathcal{C}(M)$ beliebig war, ist $\varphi = 0$, also liegt Y dicht in $\mathrm{L}^1(M,\eta)$. Damit gilt die Aussage unter der angenommen Existenz der schwachen Häufungspunkte.

Es sei $f \in \mathcal{C}(M)$ beliebig. Da U ein Markovscher Verbandsoperator ist, ist A^N für alle $N \in \mathbb{N}$ als Operator von $\mathrm{L}^\infty(M,\eta)$ in sich selbst eine Kontraktion, insbesondere ist $(A^N f)_N$ eine in $\mathrm{L}^\infty(M,\eta)$ beschränkte Folge und besitzt nach dem Satz von Banach-Alaoglu einen Häufungspunkt in der schwach-*-Topologie von $\mathrm{L}^\infty(M,\eta) = \mathrm{L}^1(M,\eta)'$. Da η ein endliches Maß ist, ist die natürliche Inklusion $\imath : \mathrm{L}^\infty(M,\eta) \to \mathrm{L}^1(M,\eta)$ stetig bezüglich der schwach-*-stetig Topologie auf $\mathrm{L}^\infty(M,\eta)$ und der schwachen-Topologie in $\mathrm{L}^1(M,\eta)$, daher besitzt diese Folge auch einen schwachen Häufungspunkt in $\mathrm{L}^1(M,\eta)$. Ist g ein solcher schwacher Häufungspunkt von $A^N f$ für ein $f \in \mathcal{C}(M)$, so gilt $g \in \operatorname{Fix} U$, da für alle $\varphi \in \mathrm{L}^1(M,\eta)'$

$$\begin{aligned}
\varphi(Ug - g) &= (U'\varphi - \varphi)(g) = \lim_{N\to\infty} (U'\varphi - \varphi)\left(A^N f\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (U'\varphi - \varphi)(U^n f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \left(\varphi\left(U^{n+1} f - U^n f\right)\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{\varphi\left(U^N f - f\right)}{N} = 0.
\end{aligned}$$

Dies schließt den Beweis ab. ///

3.3.6 Bemerkung
Analysisieren wir den Beweis von Theorem 3.3.5, so erkennen wir, dass wir gezeigt haben, dass die Existenz von schwachen Häufungspunkten dieser Cesàro-Mittel bereits ihre Konvergenz impliziert. In [EFHN09, Thm. 8.8] wird dies in einem allgemeineren Kontext betrachtet.

In der uns gegebenen Situation der erweiterten Voraussetzungen 3.2.3 können wir genauer spezifizieren, gegen was diese Folgen konvergieren.

3.3.7 Korollar
Ist $Y = \operatorname{Fix} T$, so existiert unter den erweiterten Voraussetzungen 3.2.3 für $f \in \mathcal{C}(K)$ eine ν-Nullmenge $N_f \subseteq L$ so, dass

$$A_l^N f := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T_l^k (f) \xrightarrow[\text{in } \mathrm{L}^1(K,\mu_l)]{N\to\infty} Pf(l) \cdot \mathbb{1}_K \qquad \forall\, l \in L \setminus N_f.$$

Beweis
Ist $f \in \mathcal{C}(K)$, so konvergiert nach Theorem 3.3.5

$$A^N f := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T^k f \xrightarrow{N\to\infty} f_\infty \in \operatorname{Fix} T$$

in $\mathrm{L}^1(K,\mu)$, also existiert ein $g_\infty \in Y$ mit $ig_\infty = f_\infty$. Mit Proposition 3.2.4 gilt $P \circ T = P$ und damit folgt

$$Pf = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Pf = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P\left(T^k f\right) = P\left(A^N f\right) \xrightarrow{N\to\infty} Pf_\infty = P\left(ig_\infty\right) = g_\infty.$$

Insbesondere ist $g_\infty(l) = (Pf)(l)$ für ν-fast alle $l \in L$. Nach Theorem 3.1.2 ist

$$\Theta : \mathrm{L}^1(K,\mu) \to \int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l) : h \mapsto h \cdot \mathbb{1}_L$$

ein Banachverbandsisomorphismus und nach Proposition 3.1.3 kommutiert für den isometrischen, Markovschen Verbandsoperator

$$\widetilde{i} : Y \to \int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l) : g \mapsto \mathbb{1}_K \cdot g$$

das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "\widetilde{i}"'] & \mathrm{L}^1(K,\mu) \arrow[d, "\Theta"] \\ & \int_L \mathrm{L}^1(K,\mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l). \end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt $\Theta f_\infty = \tilde{i} g_\infty$, also folgt nach Satz 2.1.3 für ν-fast alle $l \in L$

$$f_\infty = \left(\Theta f_\infty\right)(l) = \left(\tilde{i} g_\infty\right)(l) = \mathbb{1}_K \cdot g_\infty(l) = \left(Pf\right)(l) \cdot \mathbb{1}_K \qquad \text{in } \mathrm{L}^1\left(K, \mu_l\right)$$

und somit ergibt sich die Aussage. ///

Nun können wir endlich wie angekündigt Theorem 3.1.2, Theorem 3.2.5 und Korollar 3.3.3 auf folgende, elegante Weise zusammenfassen und erweitern.

3.3.8 Theorem (Ergodische Zerlegung (funktionalanalytisch))
Ist (X, T) ein dynamisches System, so existiert ein Integralraum $\int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ so, dass $(\mathrm{L}^1(K, \mu_l), T_l)$ für ν-fast alle $l \in L$ ein ergodisches System ist und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"'] & & X \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\ \int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l) \arrow[rr, "\int T_l\,\mathrm{d}\nu(l)"] & & \int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l). \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis
Wir wählen nach Theorem 1.2.2 bzw. Korollar 1.2.4 und Bemerkung 1.2.3 metrische Modelle $\mathrm{L}^1(K, \mu)$ und $\mathrm{L}^1(L, \nu)$ von X bzw. $\operatorname{Fix} T$, die die erweiterten Voraussetzungen 3.2.3 erfüllen und übernehmen die Bezeichnungen von dort. Mit Gleichung (3.3.1) ist

$$T_l : \mathrm{L}^1\left(K, \mu_l\right) \to \mathrm{L}^1\left(K, \mu_l\right) : f \mapsto f \circ \psi$$

wohldefiniert. Interpretieren wir X als den Integralraum $\int \mathrm{L}^1(K, \mu_l)\,\mathrm{d}\nu(l)$ und T wie in Theorem 3.2.5 als Operator $\widetilde{T}$ auf diesem, so erkennen wir mit Gleichung (3.2.2) aus diesem Theorem, dass $T \cong \int T_l\,\mathrm{d}\nu(l)$. Mit Proposition 2.2.9 existiert eine ν-Nullmenge $N_1 \subseteq L$ so, dass T_l für alle $l \in L \setminus N_1$ ein isometrischer, Markovscher Verbandsoperator ist. Es bleibt die Ergodizität zu zeigen. Wir wählen eine abzählbare, dichte Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Fix} T$ und mit Korollar 3.3.7 eine ν-Nullmenge $N_2 \subseteq L$ mit $N_2 \supseteq N_1$ so, dass

$$A_l^N f := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} T_l^k\left(f\right) \xrightarrow[\text{in } \mathrm{L}^1(K,\mu)]{N \to \infty} Pf\left(l\right) \cdot \mathbb{1}_K \qquad \forall\, l \in L \setminus N_2,\ f \in \mathcal{A}.$$

Da $\mathcal{A}$ dicht in $\mathcal{C}(K)$ liegt, welches wiederum dicht in $\mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ liegt, können wir für $l \in L \setminus N_2$ und $f \in \mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ eine Folge $(f_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ wählen, die in $\mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ gegen f konvergiert. Es folgt, da T_l eine Isometrie in $\mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ ist,

$$\left\| A_l^N f - A_l^N f_n \right\| \le \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\| A_l^N \right\| \cdot \|f - f_n\| \le \|f - f_n\|$$

und damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left\|\mu_l\left(f\right) \cdot \mathbb{1}_K - A_l^N f\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} &\leq \left\|\mu_l\left(f - f_n\right) \cdot \mathbb{1}_K\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \\ &\quad + \left\|\mu_l\left(f_n\right) \cdot \mathbb{1}_K - A_l^N f_n\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \\ &\quad + \left\|A_l^N f_n - A_l^N f\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \\ &\leq 2\left\|f - f_n\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} + \left\|\mu_l\left(f_n\right) \cdot \mathbb{1}_K - A_l^N f_n\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)} \\ &\xrightarrow{N\to\infty} 2\left\|f - f_n\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu_l)}.\end{aligned}$$

Und damit gilt $A_l^N f \xrightarrow{N\to\infty} \mu_l(f)\cdot\mathbb{1}_K$ für alle $f \in \mathrm{L}^1(K,\mu_l)$ und $l \in L\setminus N_2$. Insbesondere gilt für $l \in L \setminus N_2$ und $f \in \operatorname{Fix} T_l \subseteq \mathrm{L}^1(K,\mu_l)$ bereits

$$\mu_l\left(f\right) \cdot \mathbb{1}_K = \lim_{N\to\infty} A_l^N f = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} T_l^k f = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f = f.$$

Also ist die Ergodizität und damit die gesamte Aussage gezeigt. ///

3.3.9 Bemerkung
Wir erkennen durch Betrachtung des Beweises von Theorem 3.3.8, dass die Aussage für alle metrischen Modelle $\mathrm{L}^1(K,\mu)$ und $\mathrm{L}^1(L,\nu)$ von X und $\operatorname{Fix} T$ gilt, die die erweiterten Voraussetzungen 3.2.3 erfüllen.

3.4 Maßtheoretische Interpretation

Wir zeigen nun die maßtheoretische ergodische Zerlegung aus beispielsweise [Aar97, Kapitel 2, 2.2.9] oder [DGS76, Kapitel 13] als Folgerung aus Korollar 3.3.3. Dafür übersetzen wir zunächst einige in AL-Räumen definierten Begriffe in die maßtheoretische „Sprache“.

3.4.1 Definition (TDS, MDS, Ergodische MDS)
Ein Quadrupel $(\Omega, \Sigma, \eta, \theta)$ heißt *maßtheoretisches dynamisches System* (*MDS*), falls μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einem Standard-Maßraum (Ω, Σ) ist und $\theta : \Omega \to \Omega$ messbar und maßtreu bezüglich η ist.

Ein MDS $(\Omega, \Sigma, \eta, \theta)$ heißt ergodisch, falls für alle $A \in \Sigma$, für die $\theta^{-1}(A)$ und A bis auf eine η-Nullmenge übereinstimmen, bereits $\eta(A) = 0$ oder $\eta(\Omega \setminus A) = 0$ folgt.

Wir vergleichen diese neuen Begriffe kurz mit den bisherigen Definitionen.

3.4.2 Proposition (MDS und dynamische Systeme)
Ist $(\Omega, \Sigma, \eta, \theta)$ ein maßtheoretisches dynamisches System, so ist für den von θ induzierten Operator

$$T : \mathrm{L}^1(\Omega, \Sigma, \eta) \to \mathrm{L}^1(\Omega, \Sigma, \eta) : f \mapsto f \circ \theta$$

durch $(\mathrm{L}^1(\Omega, \Sigma, \eta), \eta, T)$ ein dynamisches System gegeben. Dieses ist genau dann ergodisch, wenn $(\Omega, \Sigma, \eta, \theta)$ ergodisch ist.

Beweis
Offensichtlich ist $X := \mathrm{L}^1(\Omega, \Sigma, \eta)$ ein AL-Raum mit schwacher Ordnungseinheit $\mathbb{1}_\Omega$ und T ein Markovscher Verbandsoperator mit $\operatorname{Fix} T' \ni \eta$, da θ maßtreu bezüglich η ist. Also ist (X, η, T) ein dynamisches System.

Sind (X, η, T) ergodisch und $A \in \Sigma$ beliebig mit $\theta^{-1}(A) = A$ fast überall bezüglich η, so gilt $\chi_A \in \operatorname{Fix} T$. Also ist das MDS ergodisch, falls das dynamische System (X, η, T) ergodisch ist, da dann η-fast überall $\chi_A \equiv 1$ oder $\chi_A \equiv 0$ gilt.

Ist dagegen das MDS ergodisch und $f \in \operatorname{Fix} T$, dann folgt η-fast überall

$$\theta^{-1}([f \geq c]) = [f \circ \theta \geq c] = [Tf \geq c] = [f \geq c], \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

also mit der Ergodizität $\eta([f \geq c]) \in \{0, 1\}$. Wir definieren

$$c_0 = \sup\{c \in \mathbb{R} \mid \eta([f \geq c]) = 1\}$$

und erkennen

$$1 \geq \eta([f \geq c_0]) = \eta\left(\bigcap_{c<c_0} [f \geq c]\right) = \lim_{c \nearrow c_0} \eta([f \geq c]) = 1.$$

Damit gilt für $d > c_0$ bereits $\eta([d \geq f \geq c_0]) \geq \eta([f \geq c_0]) - \eta([f \geq d]) = 1$. Es folgt direkt

$$1 \geq \eta([f = c_0]) = \eta\left(\bigcap_{d>c_0} [d \geq f \geq c_0]\right) = \lim_{d \searrow c_0} \eta([d \geq f \geq c_0]) \geq 1,$$

also $f = c_0$ fast-überall bezüglich η. Insbesondere erhalten wir $\int f \,\mathrm{d}\eta = c_0$ und somit auch $\eta(|f - \eta(f) \cdot \mathbb{1}_K|) = 0$. ///

Als ein zentrales Mittel für „Übersetzungen“ zwischen der in den bisherigen Abschnitten verwendeten, funktionalanalytischen „Sprache“ in die maßtheoretische verwenden wir den Satz von Neumann [Neu32a, Satz 1], welcher ermöglicht die beiden zugehörigen Isomorphie-Begriffe zu übertragen. Ein Beweis in der hier verwendeten Terminologie, kann in [Sch11, Satz 1.3.12] gefunden werden.

3.4.3 Theorem (Von Neumann)
Zwei Standardwahrscheinlichkeitsräume (Ω, Σ, η) und $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\eta})$ sind genau dann isomorph, wenn die zugehörigen Lebesgue-Räume $X := \mathrm{L}^1(\Omega, \Sigma, \eta)$ und $Y := \mathrm{L}^1(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\eta})$ isomorph sind. Präziser existiert für jeden bijektiven, isometrischen Markovschen Verbandsoperator $T : X \to Y$ eine maßerhaltende, fast überall bi-messbare Abbildung $\varrho : \widetilde{\Omega} \to \Omega$, dass T von θ induziert ist, das heißt

$$Tf = f \circ \varrho \qquad \forall\, f \in \mathrm{L}^1(\Omega, \Sigma, \eta)\,.$$

Nun beweisen wir, wie angekündigt, die maßtheoretische ergodische Zerlegung als Korollar der bisherigen Theorie. Für eine maßtheoretischen Version des Beweises verweisen wir auf [Aar97, Kapitel 2, 2.2.9][1] bzw. [DGS76, Kapitel 13].

3.4.4 Korollar (Ergodische Zerlegung)
Für ein MDS $(\Omega, \eta, \Sigma, \theta)$ auf einem Standard-Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, η, Σ) existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\eta})$ und eine Abbildung $\eta_{(\cdot)} : \widetilde{\Omega} \to \mathcal{P}(\Omega)$ in die Wahrscheinlichkeitsmaße auf Ω so, dass

1. für $A \in \Sigma$ gilt
$$\eta(A) = \int_{\widetilde{\Omega}} \eta_y(A)\, \mathrm{d}\widetilde{\mu}(y)\,,$$
2. für $y \in \widetilde{\Omega}$ ist $(\Omega, \eta_y, \Sigma, \theta)$ ein ergodisches MDS.

Beweis
Ist T_θ der von θ induzierten Operator auf $X := \mathrm{L}^1(\Omega, \eta)$, so ist (X, T_θ) ein dynamisches System. Da Ω separabel und metrisch ist, ist die Borel-σ-Algebra Σ abzählbar erzeugt und wir können eine abzählbare Familie $\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ wählen, die die σ-Algebra Σ erzeugt und ein Ring ist, das heißt invariant unter endlichen Schnitten und Vereinigungen, sowie Komplementbildung ist.

Wir wählen nach Theorem 1.2.2 metrische Modelle $\mathrm{L}^1(K, \mu)$ von $X = \mathrm{L}^1(\Omega, \eta)$ und $\mathrm{L}^1(L, \nu)$ von $Y := \operatorname{Fix} T \subseteq X$, die bezüglich der natürlich Inklusion $i : Y \to X$ und $P := i'$ und mit T verträglich sind und für die ein isometrischer, Markovscher Verbandsoperator $\xi : \mathrm{L}^1(\Omega, \eta) \to \mathrm{L}^1(K, \mu)$ mit

$$\xi(\chi_A) \in \mathcal{C}(K) \qquad \forall\, A \in \mathcal{A}$$

existiert. Nach Theorem 1.3.4 gilt für die Desintegrationsabbildung $\mu_{(\cdot)} : L \to \mathcal{C}(K)'$

$$\|f\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu)} = \int \mu_l(f)\, \mathrm{d}\nu(l) \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}(K)$$

[1] Hierbei handelt es sich um eine leichte Variation des hier gezeigten Satzes. Eine abgeschwächte Form dieses Satzes kann dort nach 2.2.9 als Aufgabe gefunden werden.

und nach Theorem 3.3.8 bzw. Bemerkung 3.3.9 ist $(\mathrm{L}^1(K,\mu_l),T_l)$ für ν-fast alle $l\in L$ ein ergodisches dynamisches System. Es bleibt nur noch diese Ergebnisse zu „übersetzen“.

Für $A\in\mathcal{A}$ gilt nach Konstruktion $\xi A\in\mathcal{C}(K)$, insbesondere ist $\eta_l(A):=\mu_l(\xi A)$ für alle $l\in L$ wohldefiniert und es gilt

$$\eta\left(A\right)=\left\|\chi_A\right\|_{\mathrm{L}^1(\Omega,\eta)}=\left\|\xi\chi_A\right\|_{\mathrm{L}^1(K,\mu)}=\int_L\mu_l\left(\xi\chi_A\right)\mathrm{d}\nu\left(l\right)=\int_L\eta_l\left(A\right)\mathrm{d}\nu\left(l\right).$$

Da ξ als Isomorphismus der Lebesgue-Räume nach Theorem 3.4.3 von einer Abbildung $\varrho:K\setminus N\to\Omega\setminus M$ induziert ist, wobei $N\subseteq K$ bzw. $M\subseteq\Omega$ Nullmengen bezüglich μ bzw. η sind, folgt für $A\in\mathcal{A}$ und ν-fast alle $l\in L$ bereits

$$\eta_l\left(A\right)=\mu_l\left(\xi\chi_A\right)=\mu_l\left(\chi_{\varrho^{-1}(A)}\right).$$

Da $\mathcal{A}$ abzählbar ist, folgt diese Gleichheit für alle $A\in\mathcal{A}$ außerhalb einer ν-Nullmenge $L_1\subseteq L$ unabhängig von A. Insbesondere folgt für $A_n\in\mathcal{A}$ mit $A_{n+1}\subseteq A_n$ und $\bigcap_n A_n\in\mathcal{A}$ und $l\in L\setminus L_1$ bereits

$$\begin{aligned}\eta_l\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)&=\mu_l\left(\varrho^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\right)=\mu_l\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\varrho^{-1}\left(A_n\right)\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\mu_l\left(\varrho^{-1}\left(A_n\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\eta_l\left(A_n\right).\end{aligned}$$

Damit lässt sich η_l für ν-fast alle $l\in L$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω fortsetzen und äquivalent zum Beweis von Korollar 3.3.7 bzw. Theorem 3.3.8 erhalten wir, dass das MDS $(\Omega,\Sigma,\eta_l,\theta)$ für ν-fast alle $l\in L$ ergodisch ist. ///

3.4.5 Definition (TDS)
Ein Tupel (K,φ) heißt *topologisches dynamisches System* (*TDS*), falls K kompakt und $\varphi:K\to K$ eine stetige Abbildung ist. Das System heißt *minimal*, falls für jede abgeschlossene Menge $A\subsetneq K$ mit $\varphi(A)=A$ bereits $A=\emptyset$ gilt. Falls es nur ein Wahrscheinlichkeitsmaß gibt, bezüglich dem φ maßerhaltend ist, so heißt das System *eindeutig ergodisch* und es heißt *mittelergodisch*, falls der induzierte Operator

$$T_\varphi:\mathcal{C}\left(K\right)\to\mathcal{C}\left(K\right):f\mapsto f\circ\varphi$$

mittel-ergodisch auf $\mathcal{C}(K)$ ist, das heißt falls die Folge

$$A^Nf:=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}T^nf$$

für alle $f\in\mathcal{C}(K)$ bezüglich der Supremumsnorm konvergiert.

Um die Aussage aus Korollar 3.4.4 zu erweitern, verwenden wir Korollar 3.4.4 und [EFHN09, Kor. 9.9, 9.10].

3.4.6 Proposition
Ein TDS (K, φ) ist genau dann eindeutig ergodisch, falls der Dual T'_φ des induzierten Operator

$$T_\varphi : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K) : f \mapsto f \circ \varphi,$$

einen eindimensionalen Fixraum hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn T einen eindimensionalen Fixraum hat und auf $\mathcal{C}(K)$ mittelergodisch ist.

3.4.7 Proposition
Ist (K, φ) ein TDS und T_φ der induzierte Operator

$$T_\varphi : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K) : f \mapsto f \circ \varphi,$$

so ist dies genau dann minimal und mittelergodisch, falls (K, φ) eindeutig ergodisch ist und ein strikt positives Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf K existiert so, dass für die Borel-σ-Algebra Σ auf K das MDS $(K, \Sigma, \mu, \varphi)$ ergodisch ist.

3.4.8 Korollar (Ergodische Zerlegung mittelergodischer Systeme)
Ist (K, φ) ein mittelergodisches TDS und μ ein strikt positives Wahrscheinlichkeitsmaß so, dass (K, μ, Σ, T) für den induzierten Operator

$$T : \mathrm{L}^1(K, \Sigma, \mu) \to \mathrm{L}^1(K, \Sigma, \mu) : f \mapsto f \circ \varphi$$

ein MDS ist, so existiert ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\widetilde{K}, \widetilde{\mu})$ und eine Abbildung $\mu_{(\cdot)} : \widetilde{K} \to \mathcal{P}(K)$ in die Wahrscheinlichkeitsmaße auf K so, dass

1. für $A \subseteq K$ gilt
$$\mu(A) = \int_{\widetilde{K}} \mu_y(A) \, \mathrm{d}\widetilde{\mu}(y),$$
2. für $\widetilde{\mu}$-fast alle $y \in \widetilde{K}$ ist $(\operatorname{supp} \mu_y, \varphi)$ ein eindeutig ergodisches, mittelergodisches und minimales TDS mit dem zugehörigen ergodischen MDS $(\operatorname{supp} \mu_y, \varphi, \mu_y, \Sigma)$.

BEWEIS
Nach Korollar 3.4.4, Proposition 3.4.6 und Proposition 3.4.7 genügt es nachzuweisen, dass für $\widetilde{\mu}$-fast alle $y \in \widetilde{K}$ das Maß μ_y strikt positiv auf $\mathcal{C}(\operatorname{supp} \mu_y)$ ist und das MDS $(\mathcal{C}(\operatorname{supp} \mu_y), T)$ mittel-ergodisch ist. Die strikte Positivität von $\widetilde{\mu}$-fast allen μ_y folgt direkt aus der strikten Positivität von μ, da $\mathcal{C}(K)$ separabel ist. Für die Mittelergodizität von $T_y : \mathcal{C}(\operatorname{supp} \mu_y) \to \mathcal{C}(\operatorname{supp} \mu_y)$ muss gezeigt werden, dass $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^n f$ in $\mathcal{C}(\operatorname{supp} \mu_y)$ für alle $f \in \mathcal{C}(A_y)$ konvergiert. Es gilt für die kompakte Menge $A_y = \operatorname{supp} \mu_y$ und das Ideal

$$\mathcal{A}_y := \{ f \in \mathcal{C}(K) \mid f|_{A_y} \equiv 0 \}$$

von $\mathcal{C}(K)$ bereits

$$\mathcal{C}\left(A_y\right) \cong \mathcal{C}\left(K\right) \Big/ \mathcal{A}_y.$$

Da $(\mathcal{C}(K), T)$ nach Voraussetzung mittelergodisch ist, existiert für $f \in \mathcal{C}(K)$ der Limes von $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^n f$ in $\mathcal{C}(K)$. Also genügt es nachzuweisen, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^n f \in \mathcal{A}_y \qquad \forall\, f \in \mathcal{A}_y.$$

Dies ist jedoch der Fall, da μ_y invariant bezüglich T ist, also

$$\int |Tf| \,\mathrm{d}\mu_y = \mu_y\left(T\left(|f|\right)\right) = \mu_y\left(|f|\right) = \int |f| \,\mathrm{d}\mu_y = 0 \qquad \forall\, f \in \mathcal{A}_y$$

gilt und dies für alle $f \in \mathcal{A}_y$ bereits $Tf = 0$ auf $\operatorname{supp} \mu_y$, also $Tf \in \mathcal{A}_y$ impliziert. ///

Appendix

A.1 Effros-Borel Struktur

Üblicherweise wird die Effros-Borel Struktur auf den schwach-*-abgeschlossenen Teilräumen des Duals eines Banachraums X eingeführt [Eff65]. Wir verwenden analog zu [Tak79, Kapitel 4, Abschnitt 8] die Charakterisierung dieser Struktur aus [Eff65, Thm. 1] als Definition. Da diese Struktur für die vorliegende Arbeit nur auf Hilberträumen verwendet wird, schränken wir uns zur Vereinfachung auf diesen Fall ein.

Für einen separablen Hilbertraum H, ein Element $x \in H$ und einen abgeschlossenen Unterraums $F \subseteq H$ definieren wir $x|_F = \pi_F(x)$ als die orthogonale Projektion von x auf F. Insbesondere gilt

$$\|x|_F\|_H = \sup_{y\in F} \left| (x,\, y)_H \right| = \sup_{y\in F} \left| (\pi_F(x),\, y)_H \right| = \|\pi_F(x)\|_H \,.$$

A.1.1 Definition (Effros-Borel Struktur)
Die *Effros-Borel Struktur* ist die kleinste σ-Algebra auf der Menge $\mathfrak{W}(H)$ aller abgeschlossenen Teilräume eines separablen Hilbertraums H, für die für alle $h \in H$ die Funktion

$$\mathfrak{W}(H) \to \mathbb{R} : F \mapsto \|h|_F\| = \|\pi_F(h)\|_H$$

messbar ist.

A.1.2 Definition (Schwache Messbarkeit)
Eine Abbildung $f : L \to X$ von einem Borelraum L in einen Banachraum X heißt *schwach-messbar*, falls für alle $\varphi \in X'$ die Abbildung

$$\varphi(f) : L \to \mathbb{R} : l \mapsto \varphi(f(l))$$

messbar ist.

Um mit dieser σ-Algebra geeignet umgehen zu können, verwenden wir das folgende Theorem, das die Existenz von Abbildungen zeigt, welche die Effros-Borel Struktur charakterisieren. Eine allgemeine und deutlich kompliziertere Version dieses Theorems ist in [Eff65, Thm. 2] zu finden.

A.1.3 Theorem
Es existieren abzählbar viele Abbildungen $f_n : \mathfrak{W}(H) \to B_1(0) \subseteq H$ so, dass

1. f_n bezüglich der Effros-Borel Struktur auf $\mathfrak{M}(H)$ schwach messbar ist,

2. für alle $F \in \mathfrak{W}(H)$ die Menge $\{f_n(F)\}_n$ dicht in F liegt.

Beweis
Offensichtlich genügt es, Abbildungen so zu konstruieren so, dass der Aufspann der Bilder von $F \in \mathfrak{W}(H)$ unter diesen Abbildungen dicht in F liegt. Dafür sei $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H. Wir definieren

$$f_n : \mathfrak{W}\left(H\right) \to B_1\left(0\right) : F \mapsto \pi_F\left(e_n\right)$$

und erkennen, dass $\{f_n\}_n$ die geforderte Dichtheit erfüllt. Des Weiteren gilt für $x \in H$ mit der Parallelogrammidentität bereits

$$\begin{aligned}\left(f_n\left(F\right), x\right)_H &= \left(\pi_F\left(e_n\right), x\right)_H = \left(\pi_F\left(e_n\right), \pi_F\left(x\right)\right)_H \\ &= \frac{\|\pi_F\left(e_n + x\right)\|_H^2 - \|\pi_F\left(e_n - x\right)\|_H^2}{4},\end{aligned}$$

also ist $F \mapsto (f_n(F), x)$ messbar und damit ist f_n schwach-messbar bezüglich der Effros-Borel Struktur auf $\mathfrak{W}(H)$. ///

Mittels dieses Theorems können wir, wie das folgende Korollar aus [Tak79, Kapitel 4, Kor. 8.3] zeigt, die Messbarkeit bezüglich der Effros-Borel Struktur charakterisieren.

A.1.4 Korollar
Ist H ein separabler Hilbertraum und L ein Borelraum, dann ist eine Abbildung $F : L \to \mathfrak{W}(H)$ genau dann messbar, wenn eine abzählbare Familie $\{F_n : L \to B_1(0) \subseteq H\}_{n\in\mathbb{N}}$ von schwach-messbaren Abbildungen existiert so, dass $\{F_n(l)\}$ dicht bezüglich der schwachen Topologie in $F(l)$ liegt.

Beweis
Seien $f_n : \mathfrak{W}(H) \to H$ wie in Theorem A.1.3. Ist $F : l \to \mathfrak{W}(H)$ messbar, so erfüllt $F_n := f_n \circ F$ die Behauptung.

Angenommen, es existieren F_n wie oben. Dann gilt für $x \in H$

$$\left\| x|_{F(l)} \right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|(F_n(l), x)\right|,$$

also ist dies als Supremum abzählbar-vieler messbarer Abbildungen selbst messbar. Per Definition ist damit F messbar bezüglich der Effros-Borel Struktur. ///

A.2 Technisches zu linearen Abbildungen auf Quotientenräumen

In Proposition 2.2.11 konstruieren wir für einen invertierbaren Diagonaloperator $T = \int T_l \, \mathrm{d}\nu(l)$ die Inversen T_l^{-1} der Punktoperatoren T_l. Dafür verwenden wir das folgende Resultat, um aus der Inversen T^{-1}, die in den Quotientenraum $\int \mathrm{L}^1(K, \mu_l) \, \mathrm{d}\nu(l)$ abbildet, einen Operator S zu erhalten, der in den „original Raum“ $\prod_l \mathrm{L}^1(K, \mu_l)$ abbildet.

A.2.1 Proposition (Fortsetzung von linearen Abbildungen auf Quotienten)
Ist $\overline{T} : X/Y \to \widetilde{X}/\widetilde{Y}$ für zwei Vektorräume X und $\widetilde{X}$ und zwei Unterräume $Y \subseteq X$ und $\widetilde{Y} \subseteq \widetilde{X}$ eine lineare Abbildung, dann existiert eine lineare Abbildung $T : X \to \widetilde{X}$ so, dass für die kanonischen Epimorphismen π und $\widetilde{\pi}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"] & \widetilde{X} \arrow[d, "\widetilde{\pi}"] \\ X/Y \arrow[r, "\overline{T}"] & \widetilde{X}/\widetilde{Y} \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis
Es genügt eine lineare Abbildung $\widetilde{i} : \widetilde{X}/\widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ zu definieren so, dass $\widetilde{\pi} \circ \widetilde{i} = \mathrm{id}_{\widetilde{X}/\widetilde{Y}}$, da dann $T := \widetilde{i} \circ \overline{T} \circ \pi$ die Behauptung erfüllt. Für eine Basis $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq \widetilde{X}/\widetilde{Y}$ können wir mit dem Auswahlaxiom für alle $i \in I$ ein $g_i \in \widetilde{\pi}^{-1}(f_i) \subseteq \widetilde{X}$ wählen. Gilt für eine endliche Teilmenge $\{i_1, \ldots, i_N\} \subseteq I$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n g_{i_n} = 0,$$

so folgt

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n f_{i_n} = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \widetilde{\pi}\left(g_{i_n}\right) = \widetilde{\pi}\left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n g_{i_n}\right) = \widetilde{\pi}\left(0\right) = 0.$$

Da $\{f_i\}_i$ insbesondere linear unabhängig sind, folgt $\lambda_i = 0$. Damit ist $\{g_i\}_{i \in I}$ linear unabhängig. Definieren wir $\widetilde{i} f_i := g_i$ und setzen dies linear fort, so erhalten wir eine injektive, lineare Abbildung $\widetilde{i} : \widetilde{X}/\widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ mit $\widetilde{\pi} \circ \widetilde{i} = \mathrm{id}_{\widetilde{X}/\widetilde{Y}}$. ///

Literaturverzeichnis

[Aar97] Aaronson, Jon: *Mathematical Surveys and Monographs.* Bd. 50: *An Introduction to Infinite Ergodic Theory.* Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1997. – xii+284 S. – ISBN 0–8218–0494–4

[AE08] Amann, Herbert ; Escher, Joachim: *Analysis III.* Birkhäuser, 2008. – ISBN 3764388838 ; 978–3764388836

[Bol84] Boltzmann, Ludwig: Über die Eigenschaften monocyklischer und anderer damit verwandter Systeme. (1884?), 231–245

[Bru71] Brush, Stephen: Proof of the impossibility of ergodic systems: The 1913 papers of Rosenthal and Plancherel. *Transport Theory and Statistical Physics* (1971), 287–298

[DGS76] Denker, Manfred ; Grillenberger, Christian ; Sigmund, Karl: *Ergodic Theory on Compact Spaces.* Berlin [u.a.] : Springer-Verlag, 1976. – ISBN 3–540–07797–9 ; 0–387–07797–9

[DM75] Dellacherie, Claude ; Meyer, Paul-André: *Probabilités et Potentiel.* Bd. 1: Chapitres 1 à 4. Paris : Hermann, 1975

[Eff65] Effros, Edward G.: The Borel Space of von Neumann Algebras on a separable Hilbert space. *Pacific J. Math.* 37 (1965), 317–339

[EFHN09] Eisner, Tanja ; Farkas, Bálint ; Haase, Markus ; Nagel, Rainer: *Ergodic Theory – An Operator Theoretic Approach.* http://isem.mathematik.tu-darmstadt.de/isem, Februar 2009

[Haa11] Haase, Markus: *Ergodic Decomposition.* 2011. – Mitteilung

[Kak41] Kakutani, Shizuo: Concrete Representation of Abstract (M)-Spaces (A characterization of the Space of Continuous Functions). *Annals Math.* 42 (1941), 994–1024. – ISSN 0003486X

[Neu32a] Neumann, John von: Einige Sätze über messbare Abbildungen. *Annals Math.* 33 (1932), 564–586

[Neu32b] Neumann, John von: Proof of the Quasi-ergodic Hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* 18 (1932), 70–82

[Neu49] Neumann, John von: On rings of operators. Reduction Theory. *Annals Math.* 50 (1949), 401–485

[Růž04] Růžička, Michael: *Nichtlineare Funktionalanalysis : eine Einführung*. Berlin : Springer-Verlag, 2004. – ISBN 3–540–20066–5 ; 978–3–540–20066–6

[Sch75] Schaefer, Helmut H.: *Banach Lattices and Positive Operators*. 1. Springer-Verlag, 1975. – 376 S. – ISBN 978–3540069362

[Sch11] Schäfer, Stephanie: *Desintegration und der Satz von Rohlin aus funktionalanalytischer Perspektive*, Eberhard-Karls-Universität Tübingen, Diplomarbeit, Vor. 2011

[Tak79] Takesaki, Masamichi: *Theory of Operator Algebras*. Bd. 1. New York : Springer-Verlag, 1979. – ISBN 3–540–90391–7